

Sviluppo di un indice multi-attributo per la valutazione del merito

Giulio D'Epifanio¹

Dipartimento di Economia, Finanza e Statistica, Università degli Studi di Perugia

Riassunto. In questa nota si presenta la metodologia per la costruzione di un indice volto a valutare la performance di unità statistiche su una scala graduata. Si specifica anzitutto l'ambito valutativo di riferimento. Si raccolgono e si organizzano requisiti in documenti progettuali, da cui si estrae il reticolo delle pianificazioni ammissibili. Su tale reticolo, ogni percorso completo individua una sequenza di obiettivi progressivamente più stringenti, ovvero una pianificazione ammissibile. Assunto un criterio che specifica gli incrementi di valore, si associa alla pianificazione di riferimento un indice che gradua la performance di qualsiasi individuo attraverso un processo di riscontro sulla sequenza di obiettivi pianificati. Si propone, inoltre, il principio del merito intrinseco, cui corrisponde un criterio operativo per specificare gli incrementi di valore, in alternativa ad usuali criteri basati sull'utilità e si adatta una versione dell'indice per valutare il merito scolastico.

Parole chiave: Indice di performance; Pianificazione di obiettivi; Scala multi-attributo; Standard valutativo; Valutazione del merito.

1. Introduzione

Nel seguito, si presenta una metodologia per progettare e implementare un indice atto a valutare la performance di individui su una scala graduata (Stevens, 1946; Luce, 2005; Kampen, 2000).

L'indice è adattabile a diversi ambiti che hanno interesse per la valutazione. Si può, tra l'altro, utilizzare per valutare l'avanzamento delle performance degli studenti di un corso di studi. Può essere ideato al fine di valutare la capacità di studenti di raggiungere una sequenza di obiettivi progressivamente più elevati in termini di conoscenze, abilità, atteggiamenti, per corso di studio. Un altro indice può essere progettato per valutare l'inserimento nel mondo del lavoro di laureati, rispetto

¹ La nota è stata realizzata nell'ambito del PRIN 2007, cofinanziato dal MIUR, "Modelli, indicatori e metodi statistici per rappresentare l'efficacia formativa di corsi di laurea ai fini dell'accreditamento e del miglioramento", il cui coordinatore scientifico è Luigi Fabbris. L'autore ringrazia il Prof. Fabbris per le puntuali e stimolanti osservazioni che hanno permesso una efficace revisione e miglioramento di precedenti versioni del lavoro.

al processo figurato d'acquisizione di risorse per il lavoro.

L'indice è concepito per essere *pertinente* rispetto agli obiettivi di conoscenza e *rilevante* per il decisore (Saaty, 1980). Va, pertanto, progettato a partire da un insieme di specifiche (Antòn, 1996), così da poter dare valutazioni interpretabili in un preciso ambito di riferimento. Gli esiti valutativi dovrebbero essere giustificabili (e possibilmente condivisi con gli stakeholder), verificabili e riproducibili da chiunque.

L'indice è interpretabile nell'ambito della teoria delle decisioni multi-criterio e multi-attributo (Grabisch *et al.*, 2005, 2008), da cui eredita proprietà di coerenza formale rispetto ad assiomi di razionalità nei processi decisionali.

La validità scientifica dell'indice è interna al metodo adottato per costruirlo e consiste nella coerenza formale tra assunzioni di lavoro e risultati, dentro il quadro di riferimento assunto. Assunzioni diverse porteranno pertanto a valutazioni diverse, evidenziando che "la valutazione, prima ancora che un atto tecnico, è un atto essenzialmente politico". Questa prospettiva pragmatico-costruttivista si differenzia da approcci statistico-psicometrici (Rasch 1997).

Il lavoro si compone di due parti. Nella prima parte si definisce un indice graduato all'interno di una teoria generale del valore (Keeney, 1992). Nella seconda, si dà un'interpretazione del valore della performance come *merito* (D'Epifanio, 2008), in alternativa alla più classica interpretazione di *utilità* (Keeney *et al.* 1993, Chateauneuf *et al.* 2004).

Il profilo della performance di un individuo è descritto da un paniere di attributi, o risorse. Si assume che ogni risorsa (ad esempio, una competenza) del paniere sia riconoscibile in un individuo usando rilevatori binari (presenza/assenza). Con i requisiti progettuali (Par. 3), si costruisce il reticolo degli obiettivi ammissibili per la pianificazione, ove ogni percorso completo (dall'obiettivo d'entrata a quello finale) individua una sequenza di obiettivi progressivamente più cogenti, ovvero ordinati. Si dice che individua una "gerarchia sequenziale". Ad ogni obiettivo è associata una dotazione di risorse.

Una pianificazione, su tale reticolo, identifica dunque una dimensione valutativa. Ad ogni pianificazione è associato un protocollo di valutazione costituito da sensori atti a rilevare se, su un dato individuo, gli obiettivi pianificati sono stati realizzati.

Un individuo può essere esaminato mediante il protocollo valutativo (Par. 4). Se ha raggiunto un obiettivo, egli passerà il livello. Questa verifica si itera per tutti gli obiettivi prefissati. La sua performance sarà, dunque, misurata su una scala ordinale.

Se si assume anche la specificazione dell'incremento di valore tra due obiettivi, ad ogni passaggio di livello può essere associato un *credito* (Par. 5). Il cumulo di tali crediti dà una valutazione quantitativa della sua performance. Un indice così definito gradua la performance ed è standardizzato rispetto al criterio di valutazione degli incrementi di valore.

Nella seconda parte del lavoro (Paragrafi 5 e 6), si propone una versione dell'indice che adotta un criterio basato sul "merito intrinseco". L'indice interpreta gli incrementi di valore come incrementi di merito, rappresentati dal rischio che, raggiunto un obiettivo, non si raggiunga il successivo. Si ottiene così un indice per valutare le unità su una scala di merito, standardizzata sia sulla pianificazione di riferimento che su una popolazione di riferimento, la quale rappresenta il comportamento collettivo ideale nel quadro valutativo assunto².

2. Lineamenti metodologici

Il processo costruttivo dell'indice richiede l'esplicitazione della mappa mentale dello *stakeholder* di riferimento. Dalla mappa, emergono le risorse³ che interessano lo *stakeholder*.

Si consideri, ad esempio, il seguente pannello: $F_{full} = \{A \text{ (basic skills in office automation), } B \text{ (advanced English), } C \text{ (advanced information retrieval), } D \text{ (creative projecting), } E \text{ (international trading), } F \text{ (cooperating)}\}$.

Si assume implicitamente che alcune risorse di base (per esempio, i prerequisiti per un corso di formazione), non incluse in F_{full} , siano possedute da qualsiasi individuo in esame. Si assume, inoltre, che si possa stabilire se le risorse appartenenti alla dotazione F_{full} siano acquisite, oppure no, da ciascun individuo.

Il valutatore organizza i requisiti progettuali, resi espliciti dagli attori interessati, al fine di specificare l'ambito di riferimento dello strumento valutativo da sviluppare. L'ambito di riferimento stabilisce il quadro convenzionale (D'Epifanio, 2009) al quale la valutazione dovrà essere formalmente riferita e sostanzialmente interpretata. La specificazione dei requisiti, e delle relazioni tra questi, può essere raccolta in una *carta dei requisiti*.

Alcuni requisiti saranno considerati essenziali, altri opzionali. Questi ultimi sono eventualmente rimovibili in funzione di varianti più o meno restrittive del piano di valutazione. Essenziali sono i requisiti *de facto* imposti da dipendenze logico-causali connaturate al dominio di conoscenza sostantiva⁴. I requisiti che rappresentano

² La popolazione di riferimento può essere un insieme reale (ad esempio, i laureati di ingegneria di un'università negli ultimi 10 anni) o ideale (ad esempio, un insieme di studenti che rappresentano un *gold standard* comportamentale)

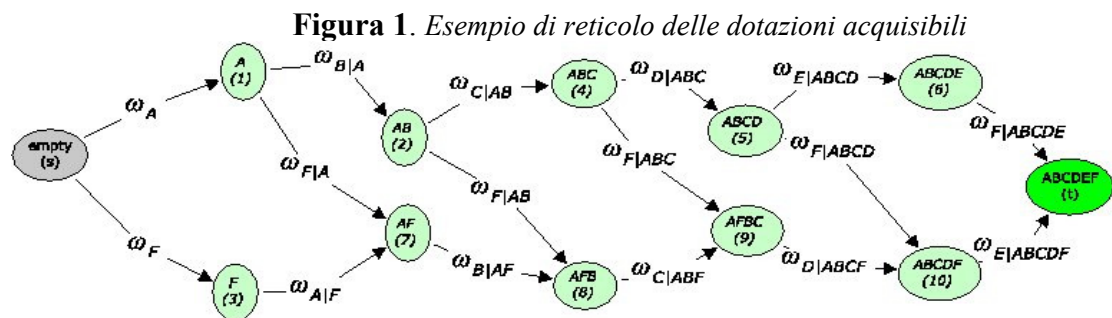
³ I termini risorsa e individuo possono essere interpretati in ambiti valutativi anche molto diversi. Ad esempio, nella valutazione di studenti, le risorse sono le conoscenze e le competenze disciplinari che quel corso di studio dovrebbe fornire. Nella valutazione di laureati, le risorse sono le conoscenze, le abilità e gli atteggiamenti che riguardano il lavoro.

⁴ Si pensi, per esempio, alla capacità C di effettuare ricerche avanzate sul *web*, che può essere acquisita solo dopo aver acquisito sia la capacità B di usare l'inglese avanzato che la capacità A di

vincoli necessari si possono chiamare “specificazioni *kernel*”.

Potrebbero esservi requisiti artificiali che impongono vincoli di precedenza obbligatori, benché non siano necessari in senso causale. Questi requisiti rappresentano l’esigenza di conformare lo strumento a criteri e vincoli prestabiliti. Alcuni requisiti possono essere indotti da assunzioni dello *stakeholder* circa dipendenze di valore⁵, oppure da preferenze e priorità. Altri possono essere indotti dall’obbligo di rispettare la *policy*⁶ di un servizio, oppure dall’adesione alle linee-guida stabilite dal decisore. I requisiti specificati nel disegno valutativo sono detti anche “specifiche operative”.

Dal reticolo completo dei sottoinsiemi di \mathcal{F}^{full} (MacLane *et al.*, 1999) si estrae il reticolo dei sottoinsiemi di risorse acquisibili considerando le specifiche di lavoro. Nella Fig. 1 si riporta lo sviluppo del pannello \mathcal{F}^{full} sopra descritto. I nodi del grafo identificano sottoinsiemi di attributi (ad esempio, il nodo “8” identifica l’insieme {A, F, B}), interpretabili come risorse (ad esempio, portafogli di competenze) acquisibili rispettando le specifiche operative. Le frecce dirette (piene⁷) rappresentano risorse non dipendenti da altre risorse nel paniere \mathcal{F}^{full} o vincoli di dipendenza essenziali nel disegno valutativo.



Il nodo di partenza “s” (*start*) identifica la dotazione vuota $\{.\}$, il nodo terminale “t” (*terminal*) la dotazione completa \mathcal{F}^{full} . Le frecce uscenti da una dotazione

gestire tecnologie di *office automation*.

⁵ Ad esempio, la creatività (D) è una dote non connessa, in senso logico-causale, alla competenza di *office automation* (C). Tuttavia, come risorsa per il lavoro, la creatività è certamente utile se posseduta assieme alla capacità di gestire metodi di automazione. In questo senso, “C dà valore a D”. Dunque, un percorso valutativo dovrebbe considerare prima C e poi cercare riscontro anche per D.

⁶ Ad esempio, un insieme di disposizioni normative che stabiliscono vincoli legali ed amministrativi, richieste di autorizzazioni burocratiche, vincoli tecnico-logistici, finanziari, etc.

⁷ I vincoli di dipendenza possono essere enfatizzati con frecce di formato diverso. Ad esempio, si possono rappresentare in grassetto le dipendenze essenziali, con tratti continui semplici le dipendenze concettuali convenzionali, stabilite da e su nodi concetto, con tratteggi le dipendenze rimosibili, etc.

acquisita rappresentano possibili direzioni per l'acquisizione di ulteriori risorse. Acquisizioni di risorse possono essere associate ad incrementi di valore⁸, così che il reticolo è rappresentato da un grafo aciclico valutato (Whittaker, 2009).

Ogni dotazione sul reticolo è acquisibile attraverso un processo incrementale che va dal nodo s fino ad essa. Può essere acquisibile attraverso percorsi diversi. Il percorso completo va dal nodo s al nodo t .

Una dotazione s'interpreta⁹ come una richiesta di risorse che, quando soddisfatta, porta alla realizzazione di un obiettivo. Pertanto, qualsiasi percorso sul reticolo uscente dal nodo s è interpretabile come una sequenza di obiettivi progressivamente più stringenti che costituiscono una *gerarchia sequenziale*. Ogni percorso completo identifica dunque una pianificazione di obiettivi, dall'obiettivo di entrata associato al nodo s a quello finale, soddisfatto se tutte le risorse in \mathbb{F}_{full} sono acquisite. Gli obiettivi sono ordinati per utilità non decrescente.

Per esempio, la sequenza di dotazioni

$$\mathbb{F}_0 = \{.\}, \{A\}, \{A, B\}, \{A, B, C\}, \{A, B, C, D\}, \{A, B, C, D, E\}, \mathbb{F}_{full} = \{A, B, C, D, E, F\} \quad (1)$$

corrisponde al percorso associato alla "sequenza di richieste"

$s, A, AB, ABC, ABCD, ABCDE, ABCDEF,$

la quale identifica anche una pianificazione ammissibile di obiettivi. Un altro esempio di pianificazione ammissibile è:

$s, A, AB, ABF, ABFC, ABFCD, ABFCDE.$

La pianificazione sequenziale di obiettivi "di riferimento" identifica la dimensione valutativa di interesse. Se fossero ammissibili molteplici pianificazioni, emergerebbero assi valutativi multipli¹⁰.

Ad una pianificazione di riferimento si può associare un processo di acquisizione di risorse¹¹, realizzabile con un programma di attività compatibile con la struttura del

⁸ Per esempio, $\omega_{C|AB} \geq 0$ rappresenta il valore aggiunto dal completare la dotazione già acquisita $\{A, B\}$ aggiungendo la risorsa C . È sottinteso un principio di sinergia non-negativa, per cui, quale che sia la dotazione già acquisita, l'ottenimento di nuove risorse non può diminuirne il valore.

⁹ Per esempio, la dotazione $\{A, B, C\} \subset \mathbb{F}_{full}$, può essere interpretata come la richiesta che "almeno, le competenze A e B e C siano acquisite, senza riguardo al resto", quindi è associabile all'obiettivo che è realizzato qualora il requisito richiesto $A \cap B \cap C$ (indicato in breve con ABC) è soddisfatto.

¹⁰ Nella Fig. 1, le sequenze "s, A, AB, ABC, ABCD, ABCDE, ABCDE" e "s, F, AF, AFB, AFBC, AFBCD" rappresentano due assi, diversi ma parzialmente sovrapposti che convergono sul nodo finale. Si pone quindi la questione di scegliere, tra le pianificazioni ammissibili, quella ottimale per rappresentare la dimensione valutativa di interesse principale. La scelta di una particolare pianificazione corrisponde all'assunzione, da parte dello stakeholder, di una precisa strategia nello sviluppo del disegno valutativo. Ad esempio, si può ridurre il reticolo ad una "catena" che descrive il percorso completo. Nella teoria delle decisioni, si possono considerare criteri di ordinamento tra pianificazioni ammissibili.

¹¹ Il processo d'acquisizione può essere riferito a: (a) acquisizione di risorse (per un corso di studio, un processo formativo programmato su una sequenza di attività didattiche che fornisce conoscenze e

diagramma delle precedenze tra attività” (Fig. 3), e un corrispondente processo di valutazione per riscontrare l’effettiva acquisizione programmata delle risorse.

Un processo di valutazione richiede la definizione di un protocollo di rilevazione, costituito da sensori atti a rilevare se le risorse sono state effettivamente acquisite per ogni individuo. Il protocollo di rilevazione richiede la predisposizione di strumenti per la valutazione delle performance individuali, ossia *indici* pertinenti allo scopo per cui sono stati progettati. L’indice identifica operativamente il concetto di performance che, tra i possibili, rappresenta la caratteristica implicita d’interesse, standardizzata sul quadro valutativo assunto, nella valutazione di individui.

3. Disegno di valutazione

I documenti sono allegati necessari per una corretta interpretazione e comunicazione dei risultati valutativi. Si sviluppa, per esemplificazioni, il caso di studio introdotto nel Par. 2.

Si raccolgono e si organizzano le specificazioni dei requisiti delle risorse descritte in F_{full} , e le relazioni tra esse, nella carta dei requisiti di cui si riporta un esempio nella Tab. 1 .

Tabella 1. Esempio di carta dei requisiti

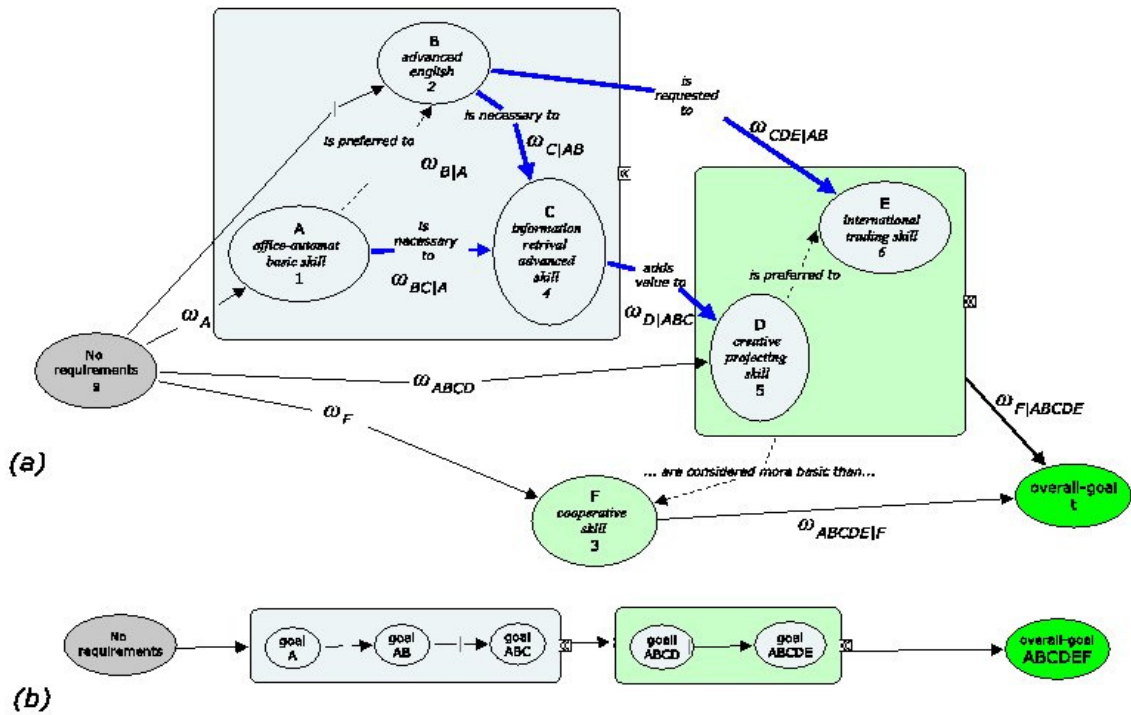
<ul style="list-style-type: none"> • la risorsa “C” necessita sia di “A” che di “B”, • la risorsa “E” necessita di “B”, • la risorsa “F” non richiede nulla, • la risorsa “D” è utile solo se aggiunta a C • la risorsa “D” è preferita ad “E”, ma “F” è preferita a “D” • la risorsa “A” è preferita a “B” • ...
--

Il modello concettuale è rappresentabile mediante una mappa sulla quale sono collocate sia le conoscenze a priori che i requisiti progettuali per stabilire il modello sul quale sviluppare lo strumento valutativo. La mappa concettuale nella Fig. 2a è stata prima abbozzata e poi elaborata (discussa, aggiornata e possibilmente condivisa tra diversi attori interessati) per raffinamenti successivi, fino alla versione definitiva.

competenze agli studenti); (b) riconoscimento dell’acquisizione di risorse (ad esempio, una certificazione di competenze e attitudini per un certo lavoro). Per comodità, distingueremo talvolta le attività di acquisizione da quelle di mero riscontro e certificazione di risorse.

La mappa sarà interpretata come: (a) diagramma delle dipendenze tra risorse, a fini descrittivi; (b) diagramma delle precedenze tra obiettivi, a fini di pianificazione; (c) diagramma delle precedenze tra attività, per fini programmatori.

Figura 2: Esempio di: (a) Mappa concettuale, (b) Possibile pianificazione di obiettivi



La mappa concettuale nella Fig. 2a è un grafo aciclico che descrive l'ordinamento tra le risorse. Include sia dipendenze logico-causali¹² strutturali che vincoli di precedenza artificiali. Le frecce¹³ tratteggiate rappresentano ordinamenti¹⁴ non essenziali (dipendenze né necessarie, né obbligatorie), ma forse utili per

¹² La mappa nella Fig. 2a è stata sviluppata a partire da relazioni di dipendenza specificate sul *kernel-graph*. Per richiami alla teoria dei grafi si può consultare, tra gli altri, Whittaker (2009).

¹³ I vincoli di precedenza possono essere graficamente enfatizzati usando frecce con formato diverso. Ad esempio, con il grassetto i vincoli di precedenza considerati essenziali, con colori diversi si possono distinguere i vincoli strutturali logico-causali da quelli artificiali, con un tratto continuo semplice le dipendenze convenzionali su nodi concetto, come s e t, con il tratteggio relazioni rimuovibili.

¹⁴ Sulla Fig. 2a, sia A che B sono raggiunti da frecce uscenti da s per indicare che sono acquisibili indipendentemente. Ciò non esclude che A possa essere considerata dallo stakeholder una risorsa più importante di B. È così ammissibile il disegno valutativo della Fig. 2b, il quale rappresenta la strategia di acquisizione in sequenza: *prima A, dopo B*.

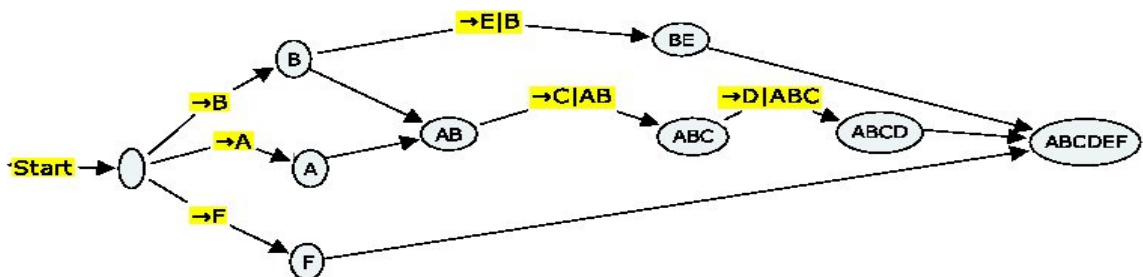
specificare ipotesi di lavoro su disegni variamente restrittivi.

- Ad ogni nodo del grafo in Fig. 2a è associato un *evento* che, figurativamente, lo “attiva”. Questo evento occorre qualora tutti i necessari eventi, antecedenti identificati dalle frecce entranti nel nodo, occorrono e, se previsto, l’acquisizione della specifica risorsa associata al nodo è andata a buon fine.
- Ogni nodo identifica¹⁵ una “dotazione di risorse”.
- Ogni dotazione può essere interpretata¹⁶ come una richiesta di risorse (es. una richiesta di competenze) che, quando soddisfatta, porta alla realizzazione di un obiettivo.

Dal diagramma delle precedenze tra obiettivi si ricava il reticolo degli obiettivi ammissibili per la pianificazione. Il reticolo della Fig. 2a è stato ricavato dalla Fig. 1 rimuovendo il vincolo di preferenza della risorsa “D” su “F” ma conservando quello di “A” su “B”. La Fig. 2a può essere considerata un diagramma *Pert* che descrive le precedenze da rispettare tra obiettivi in fase di pianificazione.

Rimuovendo dalla Fig. 2a i vincoli né necessari né obbligatori, descritti con frecce tratteggiate, si ricava il diagramma delle precedenze tra attività riportato nella Fig. 3. Il diagramma descrive i vincoli di ordinamento tra attività di acquisizione di cui tenere conto in fase di programmazione di processi che implementano la pianificazione di riferimento. Alle attività di acquisizione corrisponderanno attività di valutazione nella programmazione di processi valutativi. Alla stessa pianificazione possono corrispondere programmi diversi.

Figura 3. Esempio di diagramma delle precedenze tra attività



¹⁵ Per esempio, se l’evento associato al nodo $\underline{5}$ è stato attivato, allora è stata acquisita la risorsa \underline{C} e sono occorsi gli eventi precursori associati ai nodi $\underline{4}$, $\underline{2}$, $\underline{1}$, \underline{s} ed è stata acquisita la dotazione $\{A, B, C, D\}$. Il nodo $\underline{3}$ è associato a $\{F\}$, etc.

¹⁶ Per esempio, il nodo $\underline{4}$ che identifica la dotazione $\{A, B, C\} \subset \mathbb{F}_{full}$, è la richiesta che *almeno, le competenze A e B e C siano acquisite, senza riguardo al resto*, quindi è associabile all’obiettivo realizzato se il requisito richiesto $A \cap B \cap C$ (indicato con ABC) è soddisfatto.

La Fig. 3 evidenzia attività di acquisizione/valutazione:

- a) che possono essere realizzate in parallelo (diremmo che sono “indipendenti in programmazione”); ad esempio, le attività ($\rightarrow A$), ($\rightarrow B$), ($\rightarrow F$) che acquisiscono, rispettivamente, le risorse A, B e F richiedendo solo le risorse di base,
- b) da mettere necessariamente in sequenza. Ad esempio, l'attività ($\rightarrow C|AB$) acquisisce C, demandando sia A che B; quindi, essa non può che essere posposta ad entrambe le attività ($\rightarrow A$) e ($\rightarrow B$).

4. Sulla costruzione di un indice sul disegno di valutazione

Alla pianificazione di riferimento è associato un protocollo valutativo che usa sensori di rilevamento che definiscono un indice di performance su scala ordinale. Una versione dell'indice è specificata in ambito multi-attributo.

Si rappresenti la pianificazione di riferimento come una sequenza di obiettivi ordinati:

$$O_0 \leq O_1 \leq O_2 \leq \dots \leq O_l \leq \dots \leq O_L \quad (4)$$

Il simbolo “ \leq ” rappresenta la proposizione: “*posto che l'obiettivo O_{l+1} è realizzato, allora è stato anche realizzato l'obiettivo O_l* ”, la quale costituisce la relazione di ordinamento secondo Guttman. Ad esempio, sulla pianificazione associata ad (1) s'identificherebbero gli obiettivi:

$$O_0 := \{.\} \equiv \text{“sempre riscontrato”}, O_1 := \{A\} \equiv A, O_2 := \{A,B\} \equiv AB, \dots, \\ O_{L=6} := \{A,B,C,D,E,F\} \equiv ABCDEF.$$

Si associ alla pianificazione (4) un protocollo di valutazione costituito da indicatori specifici per ogni obiettivo della pianificazione. L'indicatore rivela se l'obiettivo è riscontrato.

Una unità i può essere esaminata in base ai rivelatori del protocollo di valutazione adottato. La scala di valutazione ordinale Y è definita per induzione (nel senso logico-computazionale) attraverso il seguente processo valutativo:

0. [Inizializzazione]

- l'obiettivo di entrata O_0 è sicuramente riscontrato presso l'unità i ; si pone, quindi, $Y := 0$ per il livello iniziale di performance e $S := 0$ per il credito iniziale;

1. [Passo induttivo generico]

- se gli obiettivi O_1, O_2, \dots, O_{l-1} sono stati già riscontrati, l'unità i è stata, almeno provvisoriamente, classificata al $Y := (l-1)$ -mo livello di performance; eventualmente, con un credito cumulato $S := \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{l-1}$;

2. [Regola di arresto]

- se anche il successivo obiettivo O_l è riscontrato dal rivelatore, allora
 - l'unità i è soggetta ad una transizione di livello che la ri-posiziona al livello di performance $Y := l$ -mo, guadagnando un ulteriore credito $\omega_l \geq 0$;
 - continua l'esame di i contro la sequenza residua di obiettivi, ovvero aggiorna $l := l+1$ e ripeti dal punto 1.
- altrimenti, il processo di scansione termina qui, classificando i al livello di performance $Y = (l-1)$, con un credito cumulato $S = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{l-1}$.

È così definito un indice di performance ordinale $Y \in \{0, 1, \dots, L\}$. Si osservi che il generico obiettivo O_l può essere ora identificato dalla clausola logica $O_l := \{Y \geq l\}$.

Se è stato specificato un criterio atto a definire i seguenti incrementi di valore:

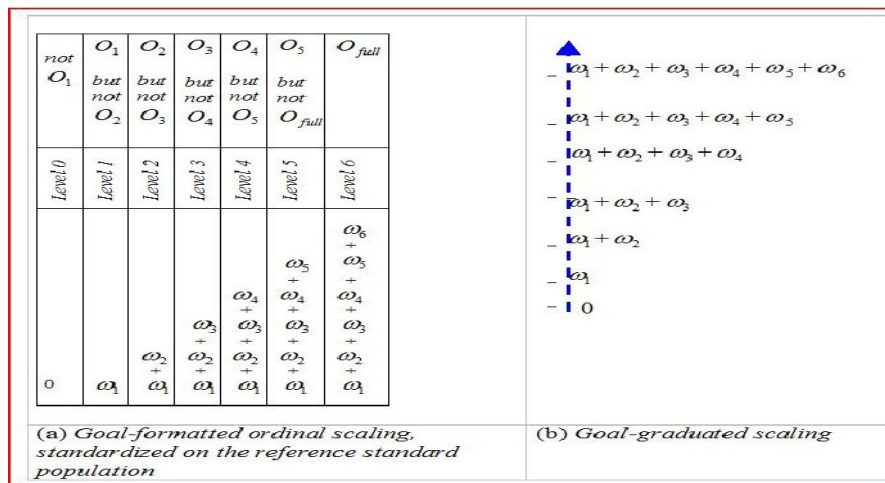
$$\omega_l := \text{val}\{O_l\} - \text{val}\{O_{l-1}\} = \text{val}\{Y \geq l\} - \text{val}\{Y \geq l-1\}, l: = 1, \dots, L,$$

dove $\text{val}(\cdot)$ denota una funzione valore definita sugli obiettivi. All'unità i si associa il valore dell'obiettivo più avanzato dalla stessa riscontrato sulla sequenza (4), vale a dire:

$$\begin{aligned} S[i] &:= \sum_{l=1}^L (\text{val}\{O_l\} - \text{val}\{O_{l-1}\}) \chi_l[i] \\ &= \omega_1 \chi_1[i] + \omega_2 \chi_2[i] + \dots + \omega_L \chi_L[i] \\ &= \omega_1 \chi_{Y \geq 1}[i] + \omega_2 \chi_{Y \geq 2}[i] + \dots + \omega_L \chi_{Y \geq L}[i] \end{aligned} \tag{5}$$

dove $\chi_l[i] = \chi_{Y \geq l}[i]$ rappresenta il rivelatore dell'obiettivo generico O_l che assume il valore "1" se l'obiettivo O_l è riscontrato e "0" altrimenti.

Figura 4. Schema di graduazione della scala



L'indice (5) associa ogni livello $l:=0, \dots, L$ della scala ordinale al valore ottenuto sommando gli incrementi di valore fino a quel livello (Fig. 4). L'indice si può ricondurre a vari ambiti della teoria delle decisioni, con collegamenti alla teoria dell'utilità, alla teoria della misura *fuzzy*, ai metodi multicriterio (Grabisch *et al.*, 2000, 2005, 2008). L'indice eredita proprietà di coerenza formali rispetto a sistemi di assiomi che riflettono principi di razionalità nei processi decisionali.

Si specializza ora l'indice (5) in un ambito multi-attributo. Si costruisce un indice standardizzato sulla pianificazione di riferimento (1), attraverso i seguenti passaggi:

- si definisce l'indice di performance ordinale Y riferito alla pianificazione¹⁷ (1)
- s'identificano gli obiettivi:
 $O_0 := \{Y \geq 0\}$, $O_1 := \{Y \geq 1\}$, $O_2 := \{Y \geq 2\}$, ..., $O_{L:=6} := \{Y \geq 6\}$
- si specifica un criterio atto a definire i seguenti "incrementi di valore"¹⁸:

$$\omega_6 := val\{Y \geq 6\} - val\{Y \geq 5\} = val\{F|A,B,C,D,E\} =: \omega_{F|ABCDE} \geq 0$$

$$\omega_5 := val\{Y \geq 5\} - val\{Y \geq 4\} = val\{E|A,B,C,D\} =: \omega_{E|ABCD} \geq 0$$

$$\omega_4 := val\{Y \geq 4\} - val\{Y \geq 3\} = val\{D|A,B,C\} =: \omega_{D|ABC} \geq 0$$

$$\omega_3 := val\{Y \geq 3\} - val\{Y \geq 2\} = val\{C|A,B\} =: \omega_{C|AB} \geq 0$$

$$\omega_2 := val\{Y \geq 2\} - val\{Y \geq 1\} = val\{B|A\} =: \omega_{B|A} \geq 0$$

$$\omega_1 := val\{Y \geq 1\} - val\{Y \geq 0\} = val\{A\} =: \omega_A \geq 0$$

- si definisce la funzione di valore, $val(\cdot)$, sommando gli incrementi di valore ω avendo posto (per esempio) il valore iniziale $val\{O_0\} := val\{\cdot\} := 0$, così che gli obiettivi saranno valutati come segue:

$$val\{O_0\} = 0$$

$$val\{O_1\} = val\{A\} = \omega_A$$

$$val\{O_2\} = val\{A,B\} = \omega_A + \omega_{B|A}$$

$$\dots$$

$$val\{O_{L:=6}\} = val\{A,B,C,D,E,F\} = \omega_A + \omega_{B|A} + \omega_{C|AB} + \omega_{D|ABC} + \omega_{E|ABCD} + \omega_{F|ABCDE}$$

¹⁷ L'indice di performance definisce una variabile su scala ordinale le cui modalità sono identificate dalle seguenti clausole: $\neg A$, $A\neg B$, $AB\neg C$, $ABC\neg D$, $ABCD\neg E$, $ABCDE\neg F$, $ABCDEF$.

¹⁸ ω_A denota l'incremento di valore che si ottiene acquisendo la risorsa A rispetto alla dotazione di partenza \underline{s} ; $\omega_{B|A}$ l'incremento di valore che si ottiene acquisendo la risorsa B rispetto alla dotazione di partenza $\{A\}$; $\omega_{C|AB}$ l'incremento di valore che si ottiene acquisendo la risorsa C rispetto alla dotazione $\{A, B\}$, e così via.

Si osservi che:

$$val\{O_0\} \leq val\{O_1\} \leq val\{O_2\} \leq \dots \leq val\{O_l\} \leq \dots \leq val\{O_L\}.$$

Sostituendo queste specificazioni nella (5), si ottiene il seguente indice multi-attributo standardizzato sulla pianificazione (1):

$$\begin{aligned} S[i] := & \omega_{A \ A} \chi[i] + \omega_{B|A \ A} \chi[i] \ B \chi[i] + \omega_{C|AB \ A} \chi[i] \ B \chi[i] \ C \chi[i] + \\ & + \omega_{D|ABC \ A} \chi[i] \ B \chi[i] \ C \chi[i] \ D \chi[i] + \omega_{E|ABCD \ A} \chi[i] \ B \chi[i] \ C \chi[i] \ D \chi[i] \ E \chi[i] + \\ & + \omega_{F|ABCDE \ A} \chi[i] \ B \chi[i] \ C \chi[i] \ D \chi[i] \ E \chi[i] \ F \chi[i] \end{aligned} \quad (6)$$

Per una risorsa U , ${}_U\chi[\cdot]$ indica un sensore rilevatore¹⁹ di U , che assegna allo stato di qualsiasi individuo i il valore²⁰ 1 se U è rilevato su i , altrimenti 0.

L'indice (6) può essere implementato come uno *strumento* operativo. Ad ogni individuo è associata una specifica realizzazione di dati sul profilo binario $(\chi_A, \chi_B, \dots, \chi_F)$, che (6) prende in input ed elabora per fornire in output un valore, standardizzato nell'ambito valutativo adottato. Adattando opportunamente quanto sopra riportato, si può assegnare un indice specifico ad ogni pianificazione sequenziale sul reticolo descritto nella Fig. 1.

Per costruzione, l'indice multi-attributo (6) eredita le proprietà generali di (5), quindi quelle di coerenza con principi di razionalità. Alcune proprietà e concetti circa l'indice (6) vanno riferiti al contesto in cui è stato concepito. Le proprietà basilari e le estensioni della (6) sono illustrate nel seguito.

- *Asimmetria, non linearità e non additività.*

Per esemplificare, si consideri, sul reticolo di Fig. 1, la dotazione $\{A, F\}$ cui corrisponde l'obiettivo AF. Si focalizzi l'attenzione sul sottoreticolo che parte da \underline{s} e finisce in $\{A, F\}$. Sulla pianificazione "s, A, AF", l'indice (6) diventa $S1 := \omega_A \chi_A + \omega_{F|A} \chi_A \chi_F$, dove ω_A è il "valore aggiunto" da \underline{A} alla dotazione vuota $\{\cdot\}$ e $\omega_{F|A}$ quello "aggiunto" da F alla dotazione $\{A\}$. L'indice è asimmetrico e

¹⁹ Ad esempio, nella valutazione di studenti su un percorso formativo, può essere un test specifico per un certo tipo di conoscenza.

²⁰ Versioni diverse dell'indice possono essere considerate, interpretando i sensori ${}_U\chi[\cdot]$ come *rivelatori fuzzy* che, applicati agli individui, descrivono la percezione *fuzzy* della competenza sull'intervallo $[0,1]$. Il rivelatore potrebbe essere progettato per assegnare un punteggio ordinale all'acquisizione della competenza, ad esempio su una scala a 5 punti (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1), che interpreta responsi verbali del tipo: "completamente assente", "scarsamente riscontrata", "poco riscontrata", "abbastanza riscontrata", "completamente realizzata".

non lineare rispetto ai sensori χ_A e χ_F . Inoltre, esso è non additivo, nel senso che, in generale, il valore della dotazione $\{A, F\}$ non è la somma dei valori attribuibili separatamente ad $\{A\}$ e $\{F\}$ (ossia $\omega_{AF} \neq \omega_A + \omega_F$), ma tiene conto delle sinergie associate alla risorsa B quando è aggiunta alla risorsa A , a meno che A e F non siano indipendenti in valore (ossia $\omega_{F|A} = \omega_F$, Keeney *et al.*, 1993).

- *Indici su pianificazioni non sequenziali.*

Si focalizzi l'attenzione sul sottoreticolo che, nella Fig. 1, parte da s e finisce in $\{A, F\}$. Si assuma che si possa scambiare l'ordine di acquisizione²¹ tra le risorse A e F , nel senso che A e F possono essere acquisite in parallelo (Fig. 3). Si considerino, quindi, sul reticolo, il percorso 1: “ s, A, AF ” e il percorso 2: “ s, F, FA ”. Al fine di ottenere l'obiettivo AF , questi due percorsi costituiscono una “pianificazione con varianti multiple”, ossia una pianificazione che si pone obiettivi alternativi ad almeno un livello della specificazione delle gerarchie²². Usando (6), ai singoli percorsi sequenziali “ s, A, AF ” e “ s, F, FA ” corrispondono, rispettivamente, gli indici $S1 := \omega_A \chi_A + \omega_{F|A} \chi_A \chi_F$ e $S2 := \omega_F \chi_F + \omega_{A|F} \chi_F \chi_A$. Si associa ora alla pianificazione con varianti multiple da essi costituita, l'indice

$$S^{sim} = a_A \chi_A + a_F \chi_F + a_{AF} \chi_A \chi_F$$

che ha una struttura simmetrica e non lineare.

I coefficienti dovranno essere specificati in conformità ad un criterio ed ai vincoli sui valori dei nodi-obiettivo s, A, F, AF . Un criterio è quello che assegna, ad un nodo-obiettivo, il valore massimo tra quelli portati dagli indici associati ai diversi percorsi sequenziali uscenti da s che arrivano al nodo-obiettivo. Se si assume che il valore di una qualsiasi dotazione di risorse (quindi dell'obiettivo che la realizza) sia *intrinseco* ad essa (ovvero, *invariante* rispetto ai percorsi²³ utilizzabili per acquisirla, $\omega_{AF} = \omega_A + \omega_{F|A} = \omega_F + \omega_{A|F}$), allora l'indice S^{sim} è specificato da:

$$\begin{aligned} S^{sim}(s) &= S1(s) = S2(s) = 0, \\ S^{sim}(A) &= a_A = S1(A) = \omega_A, \\ S^{sim}(F) &= a_F = S2(F) = \omega_F, \\ S^{sim}(AF) &= a_A + a_F + a_{AF} = \omega_{AF} = S1(AF) = \omega_A + \omega_{F|A} = S2(AF) = \omega_F + \omega_{A|F}. \end{aligned}$$

²¹ S'indichi con A la capacità di usare l'*office automation* e con F la capacità cooperativa. La prima è una competenza tecnica e la seconda un'attitudine relazionale, forse innata. Quindi, A e F sono risorse indipendenti rispetto all'ordine di acquisizione (si dice che sono indipendenti *in programmazione*).

²² La pianificazione con varianti multiple individua un asse valutativo al quale corrisponde un indice composito, ottenuto specificando le diverse ipotesi di sequenzialità tra le entità stratificate.

²³ Se, su un nodo, arrivano più percorsi, essi dovranno portare allo stesso valore dell'indice sequenziale loro associato, così da “sincronizzare” il loro valore.

L'indice S^{sim} valuta dunque le prestazioni senza riguardo all'ordine di acquisizione tra A e F, "sincronizzando" sul nodo AF il valore degli indici associati ai percorsi sequenziali passanti per AF.

Il coefficiente $a_{AF} = \omega_{AF} - \omega_A - \omega_F$ interpreta un *effetto di sinergia* nella combinazione tra A e F. Se A e F sono indipendenti in valore (ovvero, $\omega_{F|A} = \omega_F$ e $\omega_{A|F} = \omega_A$, così che $a_{AF} = 0$), allora l'indice S^{sim} è anche additivo.

L'indice (5)-(6) può essere normalizzato usando la trasformazione

$$S^*[i] := \frac{S[i] - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}} \quad (7)$$

su valori nell'intervallo [0,100%]. Questo indice S^* misura, per ogni individuo, la capacità di soddisfare l'obiettivo finale, graduando il successo globale sugli obiettivi di percorso che stabiliscono le "tacche della scala".

5. Scala di valutazione del merito

Si richiami la sequenza (4) di obiettivi, pianificata nel quadro valutativo di riferimento indicato con \mathcal{F}^* . Si valuti ogni individuo con il protocollo valutativo associato a (4). Il merito intrinseco è un principio secondo il quale "*quanto maggiore è la resistenza, opportunamente referenziata su \mathcal{F}^* , a realizzare un obiettivo pianificato su (4), tanto più alto è il merito dell'individuo capace di conquistarlo*".

In termini di variazioni, il principio è il seguente: "*posto che sia stato realizzato l'obiettivo O_{l-1} , tanto maggiore è la resistenza, opportunamente referenziata su \mathcal{F}^* , a realizzare l'obiettivo successivo O_l , tanto maggiore è il merito di chi ci riesce*".

La resistenza è rapportabile al rischio di fallire l'obiettivo O_l , posto che gli obiettivi fino a O_{l-1} siano stati riscontrati. Il rischio è riferibile ad una popolazione-tipo²⁴ \mathcal{F}^* assunta d'interesse nel quadro valutativo di riferimento \mathcal{F}^* .

Il merito è valorizzato attraverso le seguenti operazioni:

²⁴ Sono equipollenti a popolazione tipo i termini: *popolazione di riferimento*, *popolazione standard*, *popolazione modello*. La "popolazione di riferimento" rappresenta un modello di comportamento collettivo coerente con intenzioni, aspettative, requisiti, etc., specificati entro il quadro valutativo di riferimento assunto.

- 1 Si estrae casualmente un individuo dalla popolazione di riferimento \mathbb{F}^*
- 2 Si classifica il risultato sulla scala ordinale Y , associata alla pianificazione (4)
- 3 Si esamina l'individuo contro la sequenza pianificata di obiettivi (4),
- 4 Si ripete dal punto 1 finché un campione sufficientemente grande (reale o figurato) è stato estratto;

Si definiscono quindi gli L tassi di fallimento specifici per livello $l:=1, \dots, L$:

$$\tau_l^* := Pr\{o_l \chi = 0 | o_{l-1} \chi = 1; P^*\} = \frac{Pr\{Y = l-1; P^*\}}{Pr\{Y \geq l-1; P^*\}} = \frac{p_{l-1}}{p_{l-1} + p_l + \dots + p_L},$$

dove $p_l := Pr\{Y = l; P^*\}$, $l:=0, \dots, L$ rappresenta la distribuzione di Y associata alla popolazione di riferimento \mathbb{F}^* .

- 5 S'interpreta il principio di merito intrinseco ponendo, per gli incrementi di valore, $\omega_l := \Delta_{l-1} val := (val\{O_l\} - val\{O_{l-1}\}) = \tau_l^*$, $l:=1, \dots, L$.
- 6 Si sostituiscono gli incrementi di valore ω_l nella struttura dell'indice (5).

A mo' d'esempio, si consideri la distribuzione su Y : (25,40,60,50,30,20,5). I tassi di fallimento sono:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= Pr\{o_1 \chi = 0\} = (1 - Pr\{A\}) = \frac{25}{25 + 40 + 60 + 50 + 30 + 20 + 5} = 0.1086957, \\ \tau_2 &= Pr\{o_2 \chi = 0 | o_1 \chi = 1\} = (1 - Pr\{B|A\}) = \frac{40}{40 + 60 + 50 + 30 + 20 + 5} = 0.1951220, \\ \tau_3 &= Pr\{o_3 \chi = 0 | o_2 \chi = 1\} = (1 - Pr\{C|AB\}) = \frac{60}{60 + 50 + 30 + 20 + 5} = 0.3636364, \\ \tau_4 &= Pr\{o_4 \chi = 0 | o_3 \chi = 1\} = (1 - Pr\{D|ABC\}) = \frac{50}{50 + 30 + 20 + 5} = 0.4761905, \\ \tau_5 &= Pr\{o_5 \chi = 0 | o_4 \chi = 1\} = (1 - Pr\{E|ABCD\}) = \frac{30}{30 + 20 + 5} = 0.5454545, \\ \tau_6 &= Pr\{o_6 \chi = 0 | o_5 \chi = 1\} = (1 - Pr\{F|ABCDE\}) = \frac{20}{20 + 5} = 0.8. \end{aligned}$$

Al fine di re-interpretare gli incrementi di valore $\omega_l^* = (val\{O_l\} - val\{O_{l-1}\})$ su altre scale valutative, i tassi di fallimento τ_l si possono trasformare usando funzioni monotone continue $\varphi_l(\cdot)$ che possono dipendere dal livello l della scala Y , così che:

$$\omega_l^* := \omega_l(P^*) := \varphi_l\left(\frac{Pr\{Y = l-1; P^*\}}{Pr\{Y \geq l-1; P^*\}}\right) \geq 0, \quad l:=1, \dots, L \tag{8}$$

$$\omega_0^* := 0$$

Sostituendo la (8) nella (5), si ottiene, a meno di un fattore di scala, l'indice:

$$\begin{aligned}
\text{Score}(i;P^*) &:= \sum_{l=1}^L c(P^*) \cdot \omega_l(P^*) \cdot \chi_{Y \geq l}[i] = \\
&= \sum_{l=1}^L c(P^*) \cdot \varphi_l(\tau_l^*) \cdot \chi_{Y \geq l}[i] \\
&= \sum_{l=1}^L c(P^*) \cdot \varphi_l\left(\frac{\Pr\{Y = l-1; P^*\}}{\Pr\{Y \geq l-1; P^*\}}\right) \cdot \chi_{Y \geq l}[i]
\end{aligned} \tag{9}$$

Il simbolo $\chi_{Y \geq l}[i]$ rappresenta il sensore rivelatore dell'obiettivo O_l ; $c > 0$ una costante di scala che può, o no, dipendere dalla popolazione standard \mathbb{F}^* . L'indice (9) valuta un individuo come se appartenesse alla popolazione standard.

Specificando la funzione φ_l si possono ottenere versioni diverse della scala. Le seguenti trasformazioni dei tassi di fallimento τ_l :

$$\omega_l := \tau_l := \Pr\{o_l \chi = 0 \mid o_{l-1} \chi = 1; \mathbb{F}\} \tag{10}$$

$$\omega_l := \delta_l := \log \left\{ \frac{1}{1 - \tau_l} \right\} = -\log \Pr \{ o_l \chi = 1 \mid o_{l-1} \chi = 1; \mathbb{F} \} \tag{11}$$

$$\omega_l := \nu_l := \Pr\{o_{l-1} \chi = 1; \mathbb{F}\} \cdot \tau_l = \Pr\{o_{l-1} \chi = 1; \mathbb{F}\} (1 - \Pr \{ o_l \chi = 1 \mid o_{l-1} \chi = 1; \mathbb{F} \}) \tag{12}$$

portano a definire incrementi di valore interpretabili, rispettivamente, come (a) *tassi semplici di fallimento*, (b) *tassi di fallimento sulla scala logistica* ("Rasch-like scaling"), (c) *tassi di fallimento pesati* ("non-survival-like scaling").

Tabella 2. Criteri diversi applicati a varie popolazioni standard

scala Y		0	1	2	3	4	5	6
<i>Distribuzione %</i>		10,87	17,39	26,09	21,74	13,04	8,70	2,17
<i>criterio:</i>	simple failure rate scaling	0,00	0,04	0,12	0,27	0,46	0,68	1
	no-survival-like scaling	0,00	0,11	0,29	0,56	0,78	0,91	1
	Rasch-like scaling	0,00	0,03	0,09	0,20	0,37	0,58	1
<i>Distribuzione %</i>		50,00	25,00	12,50	6,25	3,13	1,56	1,56
<i>criterio:</i>	simple failure rate scaling	0,00	0,17	0,33	0,50	0,67	0,83	1
	no-survival-like scaling	0,00	0,51	0,76	0,89	0,95	0,98	1
	Rasch-like scaling	0,00	0,17	0,33	0,50	0,67	0,83	1
<i>Distribuzione %</i>		14,29	14,29	14,29	14,29	14,29	14,29	14,29
<i>criterio:</i>	simple failure rate scaling	0,00	0,09	0,19	0,32	0,48	0,69	1
	no-survival-like scaling	0,00	0,17	0,33	0,50	0,67	0,83	1
	Rasch-like scaling	0,00	0,08	0,17	0,29	0,44	0,64	1

Gli incrementi di merito corrispondono a quantità $\omega_A, \omega_{B|A}, \dots, \omega_{F|ABCDE}$ specifiche alle trasformazioni (10), (11) e (12). Sostituendo tali quantità nella (6), si ottengono (a meno di una costante di scala) versioni dell'indice di merito (9) adattate all'ambito multi-attributo. Le trasformazioni (11) e (12) portano a scale di merito additive sulle pianificazioni, nel senso che sono additivamente decomponibili su ogni pianificazione sequenziale (Par. 6).

La Tab. 2 riporta la graduazione della scala di merito, riscalata sull'intervallo $[0,1]$, assumendo diverse popolazioni standard e usando i criteri (10)÷(12). Riferite alla sequenza pianificata di obiettivi (4), la prima distribuzione è associabile ad una popolazione standard realistica. La seconda e la terza sono, invece, associate a due popolazioni standard in cui si assume, rispettivamente, che: (i) la probabilità condizionata di transizione da un obiettivo al successivo rimane costante lungo la sequenza; (ii) la variazione nel numero di fallimenti della ipotetica coorte iniziale rimane *costante* sulla sequenza pianificata.

6. Alcune proprietà dell'indice

L'ordinamento tra prestazioni basate sull'indice di merito (9) è invariante rispetto alla trasformazione monotona $\varphi_l(\cdot)$, $l := 1, \dots, L$ e non dipende dalla popolazione standard P^* , ma solo dalla sequenza pianificata di obiettivi (4).

Il merito di un individuo può essere valutato tenendo conto, oltre che dei risultati, anche di specifiche condizioni $Z := z := z(i)$, sia individuali (genere, età, etc.) che di contesto socio-economico.

La versione di (9) che porta all'*indice di merito condizionato* è la seguente:

$$\text{Score}(i | z(i); P^*) = \sum_{l=1}^L c(z(i); P^*) \cdot \varphi_l \left(\frac{e^{\log_{ii}(\tau_l^*(z_i))}}{1 + e^{\log_{ii}(\tau_l^*(z_i))}} \right) \cdot \chi[i] \quad (13)$$

dove $z(i)$ denota la condizione, in un insieme finito di condizioni di riferimento (strati), cui è associato l'individuo i .

Nella (13), c rappresenta una costante di scala, che può dipendere sia dalla condizione di riferimento che dalla popolazione standard. Le quantità $\tau_l^*(z_i)$ rappresentano tassi di fallimento *specifici* per condizione standard di riferimento assegnati²⁵ "a priori" nel disegno valutativo.

²⁵ I valori τ_l^* potrebbero essere determinati, su una popolazione standard, anche in base al modello

Si indichi con $p_l := Pr\{Y = l; P^*\}$, $l := 0, \dots, L$, la distribuzione indotta dalla popolazione standard P^* sulla scala $Y \in \{0, 1, \dots, L := 6\}$. Per costruzione, i livelli di Y corrispondono alla soddisfazione delle clausole logiche: $\neg A$, $A\neg B$, $AB\neg C$, $ABC\neg D$, $ABCD\neg E$, $ABCDE\neg F$, $ABCDEF$.

Usando la trasformazione (10), si ha:

$$\begin{aligned} \omega_A := \tau_1 = Pr\{\omega_1 \chi = 0\} &= Pr\{\neg A\} \\ &= (1 - Pr\{A\}) = \frac{p_0}{p_0 + p_1 + \dots + p_L} \\ \omega_{B|A} := \tau_2 = Pr\{\omega_2 \chi = 0 \mid \omega_1 \chi = 1\} &= Pr\{\neg B|A\} \\ &= (1 - Pr\{B|A\}) = \frac{p_1}{p_1 + \dots + p_L} \\ \dots &\dots \\ \omega_{F|ABCDE} := \tau_6 = Pr\{\omega_6 \chi = 0 \mid \omega_5 \chi = 1\} &= Pr\{\neg F|ABCDE\} \\ &= (1 - Pr\{F|ABCDE\}) = \frac{p_{L-1}}{p_{L-1} + p_L} \end{aligned}$$

Usando la trasformazione logistica (11) si ha:

$$\begin{aligned} \omega_A &:= \log\{1/Pr\{A\}\} = -\log Pr\{A\} \\ \omega_{B|A} &:= \log\{Pr\{A\}/Pr\{AB\}\} = -\log Pr\{B|A\} \\ \omega_{C|AB} &:= \log\{Pr\{AB\}/Pr\{ABC\}\} = -\log Pr\{C|AB\} \\ \omega_{D|ABC} &:= \log\{Pr\{ABC\}/Pr\{ABCD\}\} = -\log Pr\{D|ABC\} \\ \omega_{E|ABCD} &:= \log\{Pr\{ABCD\}/Pr\{ABCDE\}\} = -\log Pr\{E|ABCD\} \\ \omega_{F|ABCDE} &:= \log\{Pr\{ABCDE\}/Pr\{ABCDEF\}\} = -\log Pr\{F|ABCDE\} \end{aligned}$$

Usando, infine, la trasformazione (12) si ha:

$$\begin{aligned} \omega_A &:= (1 - Pr\{A\}) \\ \omega_{B|A} &:= Pr\{A\} (1 - Pr\{B|A\}) \\ \omega_{C|AB} &:= Pr\{AB\} (1 - Pr\{C|AB\}) \\ \omega_{D|ABC} &:= Pr\{ABC\} (1 - Pr\{D|ABC\}) \\ \omega_{E|ABCD} &:= Pr\{ABCD\} (1 - Pr\{E|ABCD\}) \\ \omega_{F|ABCDE} &:= Pr\{ABCDE\} (1 - Pr\{F|ABCDE\}) \end{aligned}$$

$\text{logit}(\tau_l^*(z)) = \text{logit}\left(\frac{Pr\{Y = l-1 \mid z; P^*\}}{Pr\{Y \geq l-1 \mid z; P^*\}}\right) = \log\left(\frac{Pr\{Y = l-1 \mid z; P^*\}}{Pr\{Y > l-1 \mid z; P^*\}}\right) = a_l + b_l z$, $l := 1, \dots, L$, che concatena modelli logistici (McCullagh *et al.* 1989) in sequenza sui diversi livelli della scala.

Si consideri il percorso tra la dotazione $\{A\}$ e $\{ABC\}$ nella Fig. 1. Usando la trasformata logistica (11) si verifica che

$$\begin{aligned} \Delta val(\{A\}, \{ABC\}) &= \log\left\{\frac{\Pr\{A\}}{\Pr\{ABC\}}\right\} = \log\left\{\frac{\Pr\{A\}}{\Pr\{AB\}}\right\} + \log\left\{\frac{\Pr\{AB\}}{\Pr\{ABC\}}\right\} \\ &= \Delta val(\{A\}, \{AB\}) + \Delta val(\{AB\}, \{ABC\}) \\ &= \rho_2 + \rho_3 = \omega_{B|A} + \omega_{C|AB} \end{aligned}$$

Usando la trasformazione (12), si verifica altresì che

$$\begin{aligned} \Delta val(\{A\}, \{ABC\}) &= \Pr\{A\}(1-\Pr\{BC|A\}) = \Pr\{A\}(1-\Pr\{B|A\}) + \Pr\{AB\}(1-\Pr\{C|AB\}) \\ &= (\Pr\{A\} - \Pr\{AB\}) + (\Pr\{AB\} - \Pr\{ABC\}) \\ &= \Delta val(\{A\}, \{AB\}) + \Delta val(\{AB\}, \{ABC\}) = v_2 + v_3 = \omega_{B|A} + \omega_{C|AB} \end{aligned}$$

Si può, quindi, generalizzare la proprietà dell'additività, indotta dalla (11) e dalla (12), su qualsiasi percorso tra due nodi sul reticolo delle dotazioni acquisibili. Usando, invece, la trasformazione "identità" (10) risulta che:

$$\Delta val(\{A\}, \{ABC\}) = \omega_{BC|A} \neq \Delta val(\{A\}, \{AB\}) + \Delta val(\{AB\}, \{ABC\}) = \omega_{B|A} + \omega_{C|AB},$$

così che non vale affatto, in generale, la proprietà di decomposizione additiva²⁶.

7. Normalizzazione del merito

Si consideri il protocollo di rilevazione T , progettato su una sequenza di obiettivi formativi progressivamente più stringenti, e la classe di riferimento F^* . Se, sottoponendo gli studenti di F^* al protocollo T , risulta che tutti gli studenti sono capaci di raggiungere il massimo punteggio, F^* può essere considerato un modello di comportamento collettivo virtuoso (*best practice*).

Si sottoponga ora lo studente Tizio, di un'altra classe, al medesimo protocollo. Si ipotizzino due situazioni:

- (a) Tizio ottiene il massimo punteggio,
- (b) Tizio ottiene il minimo punteggio, ovvero fallisce completamente T .

Nella situazione (a), standardizzato sulle "best practices", il merito di Tizio è semplicemente "allineato"²⁷ con le aspettative; nella situazione (b), è considerato

²⁶ Se la pianificazione è programmata in modo sequenziale, con attività effettive operativamente non decomponibili (Fig. 3), il requisito di additività sembra essere di scarso interesse interpretativo nella valutazione del merito. Se, invece, la pianificazione è costituita da "attività figurate", idealmente scomponibili e ricomponibili, l'additività della scala di merito sembra un requisito irrinunciabile.

²⁷ Quantunque Tizio soddisfa completamente il test T , anche tutti gli studenti nella classe di riferimento lo soddisfano completamente. Si sospetta che il test T sia troppo facile e che non si debba esaltare la prestazione di Tizio.

“disastroso²⁸”.

Se, sottoponendo il test gli studenti a T , risulta che tutti falliscono il test, ottenendo il minimo punteggio, I^{**} può essere considerato un pessimo modello di comportamento collettivo (*worst practice*). Standardizzando su una *worst practice*, il merito di Tizio sarebbe esaltato²⁹ nella situazione (a) e sarebbe giustificato³⁰ nella situazione (b).

Il merito della performance di Tizio va dunque rapportato allo *scenario valutativo* assunto attraverso la scelta concomitante sia della pianificazione di riferimento (e dell'associato protocollo T) che della popolazione di riferimento.

Lo *scenario valutativo di riferimento*, per la scala di merito Y in $0, \dots, L$, è individuato anche dalla popolazione standard I^{**} . Ad esso è riferita la distribuzione δ_Y cui corrispondono gli incrementi di merito che definiscono l'indice (9), a meno del fattore c di scala.

Per “scala intrinseca” s'intende la struttura dei rapporti tra le distanze associate alle diverse prestazioni. La scala intrinseca associata a I^{**} è invariante³¹, a meno di un fattore di scala, secondo che I^{**} aderisca a “buone” o “cattive” pratiche.

Si pone, quindi, la questione di stabilire un criterio per determinare il fattore di scala c che, pur normalizzando (9) su un campo di variazione prestabilito, dimensioni l'intensità del merito per distinguere tra situazioni diverse della distribuzione δ_Y associata a I^{**} . L'indice deve, perciò, graduare la capacità di realizzare gli obiettivi pianificati in (4) a valori su un campo prestabilito e conservare le caratteristiche della scala utili a fini interpretativi.

7.1. Normalizzazione usuale

Applicando la trasformazione (7), l'indice di merito (9) sulla scala Y , porta a

$$PScore(i; P^*) := \frac{Score(i; P^*) - Score(m; P^*)}{Score(M; P^*) - Score(m; P^*)} = \frac{Score(i; P^*)}{Score(M; P^*)}, \quad (14)$$

che assume valori su $[0, 100\%]$. I simboli m e M rappresentano, rispettivamente, gli

²⁸ Tizio ha completamente fallito lo stesso test T sul quale tutti gli studenti della classe di riferimento avevano ottenuto il punteggio massimo; dunque, ha fallito su un test presumibilmente “facile”.

²⁹ Tizio riesce nell'impresa rispetto alla quale tutti, nella classe di riferimento, avevano fallito. Il test T è così difficile da far risaltare il merito di Tizio.

³⁰ È vero che Tizio ha fallito completamente il test T , ma anche tutti gli studenti della classe di riferimento l'avevano fallito. Il test T è così difficile da giustificare la prestazione deludente di Tizio.

³¹ Sia le buone che le cattive pratiche possono portare a *scale ad intervalli costanti*, le quali sono diverse per dimensioni ma coincidenti con la stessa scala intrinseca se sono riscalate per essere normalizzate sullo stesso campo di variazione.

individui virtuali che realizzano sulla sequenza pianificata, rispettivamente, l'obiettivo nullo O_0 e quello finale O_L .

Il criterio di *scaling* applicato da (7) determina la costante c in (9), uniformando, in un certo senso, l'intensità del merito, la quale sarebbe, invece, diversa secondo che F^* aderisca a buone o a cattive pratiche³². Questo effetto è dovuto all'*autoreferenzialità* dello *scaling* sulla popolazione standard.

7.2. Merito relativo

Si considerino due situazioni virtuali di riferimento, rappresentate dalle distribuzioni δ_Y associabili, rispettivamente, ad una popolazione standard che aderisce ad *abbastanza buone pratiche*, $F^{AlmostBest}$, e a *quasi cattive pratiche*, $F^{AlmostWorst}$. Si definisca formalmente una relazione di ordinamento tale che:

$$F^{AlmostWorst} \leq \dots \leq F^* \leq \dots \leq F^{AlmostBest}$$

se e solo se, per qualsiasi individuo i (compresi m e M):

$$Score(i; F^{AlmostWorst}) \geq \dots \geq Score(i; F^*) \geq \dots \geq Score(i; F^{AlmostBest}).$$

Se vale la relazione, si propone di modificare (14) usando il seguente indice di merito relativo su $F^{AlmostWorst} \leq F^* \leq F^{AlmostBest}$:

$$RScore(i; F^*) := PScore(i; P^*) \cdot \frac{Score(M; P^*) - Score(M; P_{AlmostBest})}{Score(M; P_{AlmostWorst}) - Score(M; P_{AlmostBest})} \quad (15)$$

che raggiunge il punteggio massimo (100%) quando è riscontrato l'obiettivo finale in (4) se $F^* = F^{AlmostWorst}$, il valore minimo (0) se non è stato riscontrato neppure l'obiettivo minimale O_1 , oppure anche avendo riscontrato l'obiettivo finale in (4), se $F^* = F^{AlmostBest}$.

Si consideri ora insieme al *merito* (di avanzare verso l'obiettivo finale) anche il

³² Si ponga che le *best practice* siano distribuite come $\delta_{Best} := (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_L, 1 - \varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_L)$, ove ε_l sono quantità positive infinitesime tali che gli incrementi di merito (8) $\omega_l = \lambda \approx 0$ sono associati ad una costante positiva prossima (ε_l opportunamente piccoli) a zero. Si ponga, inoltre, che le *worst practice* siano distribuite come $\delta_{Worst} := (1 - \varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_L, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_L)$, ove ε_l sono quantità infinitesime tali che gli incrementi di merito (8) $\omega_l = \lambda \approx 1$ siano costanti prossime a uno. Normalizzato su $[0, 1]$, l'indice (14) porterebbe alla stessa scala ad intervalli costanti, indipendentemente dalla distribuzione della popolazione standard (δ_{Best} o δ_{Worst}).

demerito (di scostarsi dall'obiettivo finale). Si propone quindi il seguente indice che relativizza il *merito complessivo* entro il quadro $F_{AlmostWorst} \leq F^* \leq F_{AlmostBest}$:

$$T(i; F^*) := PScore(i; P^*) \frac{Score(M; P^*) - Score(M; P_{AlmostBest})}{Score(M; P_{AlmostWorst}) - Score(M; P_{AlmostBest})} + \quad (16)$$

$$- (1 - PScore(i; P^*)) \frac{Score(M; P_{AlmostWorst}) - Score(M; P^*)}{Score(M; P_{AlmostWorst}) - Score(M; P_{AlmostBest})}.$$

L'indice $T(i; F^*)$ assegna a qualsiasi individuo i un punteggio in $[-100\%, +100\%]$. In particolare, assegna il valore

- -1 al merito dell'individuo che fallisce tutti gli obiettivi sulla pianificazione, se $F^* = F_{AlmostBest}$,
- +1 al merito dell'individuo che riscontra tutti gli obiettivi sulla pianificazione, se $F^* = F_{AlmostWorst}$,
- 0 al merito di quell'individuo che (a) fallisce tutti gli obiettivi sulla pianificazione (4), ma $F^* = F_{AlmostWorst}$, oppure realizza tutti gli obiettivi sulla pianificazione (4), ma $F^* = F_{AlmostBest}$.

La prestazione di un individuo dipende dunque, simmetricamente, dal merito (di salire la scala) e dal demerito di non raggiungere la meta, ma anche dalla collocazione della popolazione standard, sulla quale il merito è standardizzato.

8. Conclusioni

La caratteristica più importante del tipo di indice proposto, per la valutazione della performance di individui, è di essere completamente standardizzato, sia sul processo costruttivo che sulle specificazioni di lavoro assunte a priori. Così che, esso potrà essere verificato, riprodotto, condiviso o, eventualmente, confutato con piena trasparenza e responsabilità.

Riferimenti bibliografici

- ANTÓN A.I. (1996) Goal-based requirement analysis, *IEEE Proceedings of ICRE '96* 0-8186-7252-8/96
- CHATEAUNEUF A., COHEN M., MEILIJSON I. (2004) Four notions of mean-preserving increase in risk, risk attitudes and applications to the rank-dependent expected utility model, *Journal of Mathematical Economics*, **40**: 547-571
- D'EPIFANIO G. (2008) *Worthiness based interpretation of equi-distanced performance scales*. In: *MTISD 2008. Methods, Models and Information Technologies for Decision Support Systems*, siba2.unile.it/ese/issues/324/722/MTISD_2008_p152.pdf; e-ISBN: 978-88-8305-060-2 (cd-rom v.)978-88-8305-061-9
- D'EPIFANIO G. (2009) Implicit Social Scaling. From an institutional perspective, *Social Indicator Research*, **94**: 203-212
- GRABISCH M., KOJADINOVIC I., MEYER P. (2008) A review of methods for capacity identification in Choquet integral based multi-attribute utility theory. Applications of the Kappalab R package, *European Journal of Operational Research*, **186**: 766-785
- GRABISCH M., LABREUCHE C. (2005). *Fuzzy measures and integrals in MCDA*. In: Figueira J., Greco S., Ehrgott M. (eds) *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, International Series in Operations Research & Management Science, Volume 78, Springer: 563-604
- GRABISCH M., MUROFUSHI T., SUGENO M. (2000) *Fuzzy Measures and Integrals*, Physica-Verlag, Heidelberg
- LUCE R.D. (2005) Measurement analogies: Comparisons of behavioral and physical measures, *Psychometrika*, **70**(2): 227-251 DOI: 10.1007/s11336-004-1248-8
- MACLANE, S., BIRKHOFF, G. (1999) *Algebra*, AMS, Chelsea, ISBN 0-8218-1646-2
- MC CULLAGH P, NELDER J (1989) *Generalized Linear Models*, 2nd edn., Chapman and Hall, London
- KAMPEN J., SWYNGEDOUW M. (2000) The ordinal controversy revisited, *Quality and Quantity*, **34**(1): 87-102
- KEENEY R.L (1992) *Value Focused Thinking*, Harvard University Press, Cambridge, MA
- KEENEY R.L., RAIFFA H. (1993) *Decisions with Multiple Objectives*, Cambridge Books, Cambridge
- RASCH G. (1977) On specific objectivity: an attempt at formalising the request for generality and validity of scientific statements, *Danish Yearbook of Philosophy*, **14**: 58-94
- SAATY T.L. (1980) *The Analytic Hierarchy Process. Planning, Priority Setting, Resource Allocation*, McGraw-Hill, New York
- STEVENS S.S. (1946) On the theory of scales of measurement, *Science*, **103**: 667-680
- WHITTAKER J. (2009) *Graphical Models in Applied Multivariate Statistics*, Wiley Publishing, New York ISBN:9780470743669

A Multi-Attribute Index for Evaluating Worthiness

Summary. *We present a methodology for the construction of an index for the evaluation of the units' performance on a graduated scale. First we deal with the specification of the evaluation framework. For this, information and requirements on the evaluative design are gathered and systematized and a lattice of eligible plans is drawn. Each full path identifies a sequence of progressively more cogent objectives that define a reference plan. Assuming a criterion that specifies the increase in value, we propose an index that sizes the performance of an individual who goes through an evaluation process. Second, we put forward the principle of intrinsic worthiness, which allows specifying a criterion for measuring the increase in value along the planned sequence of objectives, and present versions of a multi-attribute index standardized on some reference population.*

Keywords: *Performance index; Goal planning; Multi-attribute scaling; Standard population; Worthiness based index.*