Misure di separatezza tra popolazioni rispetto a gradazioni di gravità di fenomeni

Sara Poffe[1]
Dipartimento di Scienze Statistiche, Università degli Studi di Padova.

Riassunto. Nell'ambito degli studi sociali l'interesse è spesso rivolto a fenomeni che si manifestano con gradazioni di gravità progressive e che sono caratterizzati da basse frequenze in corrispondenza dei livelli estremi di gravità. I fenomeni sono tipicamente lo stato medico-sanitario di persone o di aree, i disagi economici di famiglie o aziende, le tensioni relazionali di individui, famiglie, comunità. Per l'analisi della dipendenza tra questi fenomeni e agenti "causali" è opportuno impiegare metodi specifici, che pesino in modo particolare le classi che rappresentano la gravità estrema. Nella presente nota si propongono metodi statistici per la misura della separatezza tra due o più popolazioni relativamente alla gravità di un fenomeno. Per questo si analizzano le proprietà teoriche ed empiriche di alcuni metodi statistici per l'analisi delle relazione asimmetrica tra due variabili.
Parole chiave: Separatezza, Analisi asimmetrica, Gravità di un fenomeno, Distanza tra distribuzioni, Rischio Relativo.

1. Il problema

Nell'ambito degli studi sociali si ha spesso a che fare con fenomeni caratterizzati da livelli di gravità che vanno dall'assenza del fenomeno a punte di gravità estrema, con almeno una gradazione intermedia. La distribuzione delle frequenze mostra tipicamente una forte concentrazione sulla gradazione che denota la nullità o l'irrilevanza del fenomeno in esame e un rapido abbassamento delle frequenze verso la coda destra sulla quale si trovano le massime gravità[2]. I fenomeni rappresentati possono es-

[1] Il presente lavoro è stato finanziato nell'ambito del PRIN "Transizioni Università-Lavoro e valorizzazione delle competenze professionali dei laureati: modelli e metodi di analisi multidimensionale delle determinanti", cofinanziato dal MIUR. Coordinatore nazionale del PRIN e del gruppo di Padova è Luigi Fabbris.

[2] Se il fenomeno fosse su scala quantitativa, le distribuzioni sottostanti sarebbero concentrate attorno all'origine con una lunga coda a destra, tale da prefigurare una distribuzione esponenziale-negativa o log-normale.

sere lo stato di una malattia presso un persona, il livello sanitario di un'area, il disagio economico sofferto da una famiglia o da un'impresa, la tensione relazionale tra membri di una comunità, la tensione politico-sociale tra paesi, e così via.

Siano Y la variabile che denota il livello di gravità del fenomeno, ripartita in K classi, p_{kj} (k=1, …, K; j=A, B) la frequenza relativa della generica classe k nel campione j, n_{kj} la frequenza (assoluta) campionaria della stessa classe e N_{kj} la frequenza della popolazione della classe (Tab.1).

Tabella 1. D*istribuzione delle frequenze relative (p), assolute (n) e cumulate (N) di due campioni da due popolazioni rispetto a gradazioni di gravità di fenomeni*

Livello di gravità (Y)	A			B			Totale		
1	p_{1A}	n_{1A}	N_{1A}	p_{1B}	n_{1B}	N_{1B}	$p_{1\bullet}$	$n_{1\bullet}$	$N_{1\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	p_{kA}	n_{kA}	N_{kA}	p_{kB}	n_{kB}	N_{kB}	$p_{k\bullet}$	$n_{k\bullet}$	$N_{k\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K	p_{KA}	n_{KA}	N_{KA}	p_{KB}	n_{KB}	N_{KB}	$p_{K\bullet}$	$n_{K\bullet}$	$N_{K\bullet}$
Totale	1	$n_{\cdot A}$	$N_{\cdot A}$	1	$n_{\cdot B}$	$N_{\cdot B}$	1	n	N

In questo lavoro si presenta una rassegna di metodi specifici per l'analisi asimmetrica della relazione tra il fenomeno Y e una variabile nominale X che identifica le G, $G \geq 2$, popolazioni messe a confronto (Par. 2) e, prendendo spunto da un'applicazione su dati reali, si individuano i metodi che, per proprietà matematiche e caratteristiche empiriche, sono proponibili come misure di separatezza tra le due distribuzioni.

La differenza tra le due distribuzioni A e B è valutata rispetto alle gradazioni su una scala ordinale ad almeno tre livelli. Il problema sarebbe di poco conto se si volesse dare a ciascuna classe di gravità lo stesso peso. Se, invece, s'intende dare maggior peso alle variazioni nelle categorie estreme, quelle che rappresentano i livelli di maggior gravità, è opportuno individuare metodi specifici.

I metodi considerati fanno riferimento a quattro approcci metodologici caratterizzati dal mantenere l'ordinalità della gravità e dal valorizzare le classi con frequenze molto basse (per maggiori dettagli v. Par. 2):

- massimizzazione della distanza distributiva;
- massimizzazione della differenza tra le mediane condizionate;
- massimizzazione dei rischi relativi;
- massimizzazione della significatività mediante soluzione non parametrica.

Vale la pena sottolineare che potrebbero esserci delle compensazioni nelle due distribuzioni tra danni di diversa importanza sebbene sia molto più probabile il caso in cui le differenze riguardino tutte le categorie di gravità estreme.

Per meglio comprendere il senso delle proposte metodologiche che si presentano nel seguito si utilizzano dei dati empirici sul grado di disagio delle famiglie venete, vale a dire lo stato di malessere psicologico o fisico che pervade tutti i componenti della famiglia e che può essere generato da problemi di salute dei componenti, da disturbi relazionali tra i componenti, oppure tra gli stessi e le persone esterne, da motivi economici o da eventi critici quali uno sfratto o un lutto improvviso.

L'applicazione a carattere esemplificativo si presenta nel Par. 3. Nel Par.4 si raccolgono alcune considerazioni generali di carattere conclusivo e propositivo.

2. Proposte metodologiche

I metodi che si analizzano sono appropriati per l'analisi asimmetrica, ossia per l'analisi della dipendenza tra la variabile che identifica i gruppi e quella che descrive la gravità del fenomeno in esame.

Il primo metodo fa riferimento al concetto di distanza distributiva. Si considerino le distribuzioni di frequenze su K categorie ordinate di due campioni tratti da due popolazioni A e B e si indichino con $p_{kj}=n_{kj}/n_{k\cdot}$ (k=1, …, K; j= A, B) le frequenze relative dei due campioni e con $\overline{p}_k$ il valor medio della k-esima categoria:

$$\overline{p}_k = \frac{n_{\bullet A}p_{kA} + n_{\bullet B}p_{kB}}{n_{\bullet\bullet}}$$

dove $n=n_{..}=n_{.A}+n_{.B}$ è la numerosità complessiva dei campioni tratti da A e B.

La dipendenza in distribuzione può essere misurata attraverso il seguente indice (Fleiss, 1981):

$$\chi^2 = n_{\bullet A}n_{\bullet B}\sum_{k=1}^{K}\frac{\left(\dfrac{n_{kA}}{n_{\bullet A}} - \dfrac{n_{kB}}{n_{\bullet B}}\right)^2}{n_{k\bullet}} = \frac{n_{\bullet A}n_{\bullet B}}{n_{\bullet\bullet}}\sum_{k=1}^{K}\frac{\left(p_{kA} - p_{kB}\right)^2}{\overline{p}_k}\,. \tag{1}$$

Si può notare che, per ciascuna delle K categorie, le differenze tra le frequenze sono ponderate con peso inversamente proporzionale alla frequenza della categoria. Tale indice si distribuisce approssimativamente come un χ^2 con K-1 gradi di libertà. Quanto più il valore empirico risulterà superiore al valore di un χ^2_{K-1}, tanto più la differenza tra i due campioni sarà significativa.

La seconda misura di dipendenza è data dalla media delle misure di dipendenza calcolabili per ciascun gruppo. Tale misura può essere la differenza tra due proporzioni, il logaritmo dell'*odds ratio* e così via. Siano $\bar{y}_j$ il valore medio di Y per il gruppo j-esimo, supposto indipendente dagli altri, s($\bar{y}_j$) il suo standard error e $w_j=[s(\bar{y}_j)]^{-2}$ il rispettivo peso. In caso di assenza di associazione per il gruppo j-esimo, la quantità $\chi_j^2 = w_j y_j^2$ ha distribuzione χ_1^2. Per valutare il grado medio di associazione tra G gruppi $(G \geq 2)$ si usa la quantità χ_{assoc}^2 (Gart, 1962; 1970):

$$\chi_{assoc}^2 = \bar{y}^2 \sum_{j=1}^{G} \frac{1}{\left[s\left(\bar{y}_j\right)\right]^2} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{G} w_j y_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{G} w_j} \tag{2}$$

dove: $\bar{y} = \dfrac{\sum_{j=1}^{G} w_j y_j}{\sum_{j=1}^{G} w_j}$ è la media aritmetica delle G misure ponderata con l'inverso della varianza.

L'indice si distribuisce approssimativamente come un χ^2 con un grado di libertà. Il suo campo di variazione è rappresentato dai reali positivi e quanto più il suo valore empirico risulterà superiore a quello di un χ_1^2 tanto più sarà evidente la differenza in distribuzione tra i due campioni.

Un terzo metodo statistico, detto analisi Ridit (*Relative to an Identified Distribution*), mette a confronto due distribuzioni di frequenza, una delle quali di riferimento ("standard"). L'analisi si basa sul Ridit medio, dato da (Selvin, 1991):

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^{K} r_k \frac{n_{kA}}{n_{\bullet A}} \tag{3}$$

dove $r_k = \dfrac{n_{1B} + \Lambda + n_{kB}/2}{n_{\bullet B}}$ è il Ridit della categoria k-esima.

Questo indicatore varia tra 0 e 1, assumendo così il significato di probabilità che un'unità appartenente al campione da verificare A possa avere livelli di gravità maggiori di una appartenente al campione di riferimento B. Un valore di 0,5 rappresenta l'equivalenza in gravità tra le due distribuzioni a confronto; valori superiori a 0,5 indicano che il campione A manifesta gravità superiore a quello di controllo B; nel caso di un valore inferiore a 0,5 il campione A manifesta gravità inferiori al campione B. Per registrare lo scostamento di un certo livello nelle distribuzioni di frequenze è opportuno che l'indice si allontani da 0,5 in maniera apprezzabile. La statistica test per verificare la significatività dello scostamento è:

$$t = \frac{\bar{r} - 0{,}5}{\sqrt{\mathrm{var}(\bar{r})}} \qquad \text{con} \qquad \mathrm{var}(\bar{r}) = \frac{1}{12 n_{\bullet A}} + \frac{1}{12 n_{\bullet B}}$$

Questi tre indici sono non particolarmente adatti per la misura della dipendenza perché danno a ciascuna categoria una uguale importanza e, quindi, non esaltano l'importanza delle categorie di gravità estrema. Infatti:

- il χ^2 presenta a numeratore una differenza prossima allo zero per le gradazioni più elevate di gravità e il valore diminuisce ulteriormente quando viene elevato al quadrato;
- il χ^2_{assoc} non è efficiente nel caso di categorie con frequenze molto diverse tra loro, essendo una media delle misure di dipendenza calcolate in ognuno dei gruppi considerati;
- anche il Ridit, essendo una media ponderata, non valorizza le classi caratterizzate da basse frequenze.

Un altro metodo plausibile è basato sulla variabilità tra le mediane condizionate. L'indice che misura tale separatezza tra *G* gruppi è il coefficiente di differenziazione θ di Freeman (1965):

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{G} \sum_{j>i}^{G} \left| C_{ij} - D_{ij} \right|}{\sum_{i=1}^{G} \sum_{j>i}^{G} n_{\bullet i} n_{\bullet j}} \tag{4}$$

dove:

- C_{ij} rappresenta il numero di confronti in cui le unità appartenenti alla categoria di gravità *i* del gruppo *A* hanno rango inferiore a quello delle unità della categoria *j* del gruppo *B.* Se *G*=2:

$$C = n_{1A}\left(n_{2B} + \Lambda + n_{kB} + \Lambda + n_{KB}\right) + n_{2A}\left(n_{3B} + \Lambda + n_{kB} + \Lambda + n_{KB}\right) + \Lambda + n_{K-1A} n_{KB}$$

- D_{ij} rappresenta, viceversa, il numero di confronti in cui le unità della categoria di gravità *i* del gruppo *A* hanno rango superiore a quello delle unità della categoria *j* del gruppo *B*. Se *G*=2:

$$D = n_{KA}\left(n_{1B} + \Lambda + n_{kB} + \Lambda + n_{K-1B}\right) + n_{K-1A}\left(n_{1B} + \Lambda + n_{kB} + \Lambda + n_{K-2B}\right) + \Lambda + n_{2A} n_{1B}$$

Il coefficiente θ varia tra 0 e 1, estremi compresi. Il valore 0 si ottiene quando in corrispondenza di ogni gruppo le mediane condizionate del livello di gravità sono tra loro uguali e, quindi, si ha indipendenza in mediana; il valore 1 è raggiunto quando c'è una sola frequenza non nulla per ogni gruppo (perfetta dipendenza in mediana).

Questo indice, pur misurando la dipendenza in mediana, è del tutto inappropriato per le nostre analisi a causa dell'insensibilità della mediana ai casi estremi e perché attribuisce ad ogni classe uguale importanza.

Si può considerare un altro indice di dipendenza basato sui *rischi relativi.* Sia $R_{k|1}$ $(k = 2, \ldots, K)$ il rischio del livello di gravità k-esimo in rapporto alla situazione di base che, senza perdere in generalità, si identifica con la modalità 1 (in genere, si tratta della nullità della gravità):

$$R_{k|1} = \frac{n_{kA} \times n_{1B}}{n_{kB} \times n_{1A}} \qquad k = 2, \ldots, K$$

$R_{k|1} = 1$ in caso di uguaglianza tra i rischi; $R_{k|1} > 1$ nel caso in cui si sia in presenza di un fattore di rischio; $R_{k|1} < 1$ nel caso di fattore protettivo.

La media dei rischi delle K-1 categorie rapportate alla nullità del fenomeno:

$$\overline{R} = \frac{\sum_{k=2}^{K} R_{k|1}}{K} \tag{5}$$

evidenzia a sufficienza l'esistenza di differenze nei rischi di maggiore gravità. Nonostante questo aspetto positivo, esiste in questo approccio un grosso limite dato dalla mancanza di un test che valuti la significatività statistica del risultato ottenuto.

Per la stima si fa ricorso ai modelli a *odds* proporzionali (McCullagh e Nelder, 1989) che assumono la forma:

$$\log\{\gamma_k(x)/(1-\gamma_k(x))\} = \theta_k - \beta^T x \qquad k = 2, \ldots, K \tag{6}$$

dove:

- $\gamma_k(x) = \Pr(Y \leq k \mid x)$ è la probabilità cumulata fino alla k-esima categoria;
- $\boldsymbol{x}$ è il vettore delle variabili esplicative.

I rapporti tra odds calcolati con le probabilità cumulate non dipendono dalla categoria alla quale le probabilità elementari appartengono. Pertanto, questo criterio sembra appropriato perché riesce a cogliere differenze tra due distribuzioni anche in presenza di frequenze molto basse per alcune categorie della variabile risposta. Il modello di cui questa funzione verifica l'adattamento è denominato da Agresti (2002) *cumulative link model*[3].

In alternativa alle soluzioni parametriche, si può tentare un approccio non parametrico, basato sulla metodologia dei test di permutazione (Pesarin, 2001). Il metodo è particolarmente indicato in presenza di basse numerosità campionarie, come accade nei fenomeni che si stanno considerando. In questo caso una soluzione al problema è data dalla statistica test di Anderson-Darling per dati categoriali ordinati.

Indicando col simbolo * i dati permutati, ovvero ottenuti generando tutte le possibili permutazioni dall'unione dei sottocampioni per ciascuna delle K modalità, la statistica test di Anderson-Darling assume nel nostro caso la seguente forma:

---

[3] Un criterio di verifica della bontà dell'adattamento dei modelli a *odds* proporzionali è implementata dalla funzione *polr* nella libreria MASS del software statistico R.

$$T_{AD}^{*} = \sum_{k=2}^{K} \left(N_{kB}^{*} - N_{kA}^{*}\right) \left[4 \frac{N_{k\bullet}}{n_{\bullet\bullet}} \left(\frac{n_{\bullet\bullet} - N_{k\bullet}}{n_{\bullet\bullet}} \right) \frac{n_{\bullet 1} n_{\bullet 2}}{n_{\bullet\bullet} - 1} \right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

dove N_{kA}^{*} e N_{kB}^{*} $(k = 2, \ldots, K)$ sono le frequenze cumulate ottenute dopo aver permutato i dati e $N_{k\bullet} = N_{kA} + N_{kB} = N_{kA}^{*} + N_{kB}^{*}$. Si noti che $n_{k\bullet}^{*} = n_{k\bullet}$ e $N_{k\bullet}^{*} = N_{k\bullet}$ per tutte le possibili permutazioni.

Questa statistica, oltre ad evidenziare eventuali differenze distributive tra i due campioni, ha anche il vantaggio di identificarne le direzioni, rilevando quale dei due presenti livelli di gravità superiori (Pesarin, 2001)[4]. Questo criterio fornisce una misura della significatività, ma non una misura della dipendenza.

3. Applicazione esemplificativa

Per valutare la capacità dei metodi esposti nel Par. 2 di cogliere l'importanza delle classi estreme si utilizzano alcuni dati raccolti negli anni 2001 e 2002 dall'*Osservatorio Interistituzionale Permanente sulla famiglia di Padova* relativi al disagio familiare le cui cause, in questa applicazione, a mero scopo esemplificativo, sono limitate alla presenza di componenti invalidi e di altri affetti da malattie cronico-degenerative in famiglia.

I livelli di gravità del disagio sono così definiti (Breda e Fabbris, 2002):

1. disagio nullo o fisiologico;
2. disagio lieve, affrontabile con impiego di risorse esclusivamente familiari;
3. disagio acuto, tale da richiedere l'intervento esterno di istituzioni (servizi) o associazioni di volontariato;
4. disagio estremo, che permane anche dopo essere ricorsi all'aiuto esterno e crea una situazione a cui non è possibile porre rimedio sostanziale.

Nella Tab. 2 si riporta la distribuzione dell'intero campione di famiglie rispetto a quattro livelli di disagio e alcune misure dell'interazione tra il numero di invalidi e il numero di malati rilevati presso le famiglie campione[5].

Applichiamo dapprima il metodo basato sulla distanza tra distribuzioni (funzione 1). Relativamente al numero di invalidi, il χ^2 assume un valore pari a 95,6 che, confrontato con un χ^2 con tre gradi di libertà, evidenzia una significativa differenza

[4] Altre statistiche test per confrontare, in ambito non parametrico, le distribuzioni di due campioni non sono esaminate in questa nota perché si è tratta di approcci riconducibili a quelli qui trattati.

[5] Per problemi di frequenze estremamente basse (0 e 1), le famiglie in cui è presente almeno un invalido sono state raggruppate in un'unica modalità, indipendentemente dal numero di componenti affetti da malattie cronico-degenerative.

tra le distribuzioni del disagio delle famiglie con invalidi rispetto a quelle senza invalidi. Anche per le altre due variabili in esame si ottengono risultati di considerevole significatività. Tuttavia, nei campioni in cui sono presenti più malati e/o almeno un invalido le frequenze dei livelli di gravità acuto ed estremo sono decisamente più elevate che nei casi di assenza di componenti con deficit.

Tabella 2. *Distribuzione delle famiglie padovane rispetto al disagio percepito e alla presenza di componenti invalidi e/o malati*

Livello di disagio	Numero invalidi		Malati cronico-degenerativi		Effetto di interazione			Totale
	0	≥ 1	≤ 1	≥ 2	0 inval., ≤1 malati	0 inval., ≥ 2malati	≥ 1 invalido	
Nullo, fisiologico	628	27	586	58	571	57	16	655
Lieve	138	23	118	31	108	30	11	161
Acuto	33	19	32	8	25	8	7	52
Estremo	5	5	4	3	2	3	2	10
Totale	804	74	740	100	706	98	36	878

Ipotizzando che le frequenze di gravità estrema raddoppino, l'indice non riesce a rilevare le differenze tra i due campioni. Questa evidenza emerge solo nel caso in cui le frequenze inerenti ai livelli più elevati di gravità aumentino di almeno tre volte da un gruppo all'altro. Siccome per la misura del rischio di disagio anche piccole differenze possono essere importanti, è indiscutibile che il χ^2 non riesce a misurare compiutamente la differenza tra i due campioni.

Con l'indice χ^2_{assoc} si può valutare il grado di associazione tra i due campioni combinando i rischi ottenuti per confronto tra il livello di disagio nullo/fisiologico con ciascuna delle altre tre gradazioni di gravità. Relativamente al numero di invalidi e al numero di malati, tale quantità risulta 90,7 e 27,8, rispettivamente. Nel caso dell'interazione è possibile ricavare tre valori del χ^2_{assoc}, confrontando a coppie le tre modalità da cui è costituita. Anche questi risultati, come quelli ottenuti dall'effetto delle singole variabili, mostrano evidenti differenze nelle distribuzioni dei due gruppi.

Come per il χ^2, questa apparente adeguatezza è dovuta esclusivamente alle elevate frequenze nei livelli di maggiore gravità del campione in cui sono presenti più malati e/o almeno un invalido rispetto a quello in cui non sono presenti componenti con qualche tipo di deficit.

Una diversità nelle distribuzioni meno evidente, ma pur sempre significativa, si ottiene considerando l'effetto di interazione e confrontando i due gruppi costituiti rispettivamente da nessun invalido, almeno due malati e da almeno un invalido. Il valore che assume in questo caso l'indice è pari a 3,8. Ciò è dovuto al fatto che l'aumento delle frequenze relative da un campione all'altro è circa il doppio.

L'indice Ridit calcolato sui dati in esame coglie perfettamente le differenze tra i due campioni per tutte e tre le variabili: il Ridit medio si colloca, infatti, significativamente lontano da 0,5 che rappresenta l'ipotesi di indipendenza. Tuttavia, se nel campione di "casi" le frequenze di disagio acuto o estremo – che costituiscono il triplo di quello di controllo – raddoppiassero solamente il Ridit resterebbe simile ai precedenti e non renderebbe conto della forte diversità tra i gruppi. Ciò dipende dall'essere costruito come una media (ponderata con le frequenze cumulate) che non valorizza adeguatamente le classi di bassa numerosità.

Per le tre variabili a disposizione, il coefficiente θ evidenzia una certa diversità tra le mediane condizionate della gravità: rispetto al numero di invalidi, l'indice è 0,46, rispetto al numero di malati 0,21 e all'effetto di interazione 0,27.

Per ciascuna variabile si è calcolata la media aritmetica semplice dei rischi. Questo indicatore riesce ad evidenziare le differenze tra i rischi dei due livelli di maggior gravità (acuto ed estremo) nel caso di aumento di frequenze da un campione all'altro. Esso assume valori decisamente elevati per tutte e tre le variabili a disposizione. Indicando con $\overline{R}$ la media aritmetica dei rischi, il risultato relativo alla prima variabile è pari a:

$$\overline{R}\{numero\ di\ invalidi\} = \frac{R(estremo \mid nullo) + R(acuto \mid nullo) + R(lieve \mid nullo)}{3} =$$

$$= \frac{23,3 + 13,4 + 3,9}{3} = 13,5$$

Per la seconda variabile il valore assunto dall'indicatore risulta 4,2, per la terza 7,0 confrontando la prima modalità (nessun invalido, al più un malato) con la seconda (nessun invalido, due o più malati), 16,4 confrontando la prima con la terza (uno o più invalidi) e 2,3 confrontando la seconda con la terza.

I risultati dell'applicazione del modello a *odds* proporzionali sono riportati nella Tab. 3 relativamente al numero di invalidi[6]. Le differenze tra i logit possono essere sfruttate per il calcolo dei rapporti tra *odds*. Ad esempio *exp*(1,8)=6,1 rappresenta il rischio di disagio che le famiglie con almeno un invalido in casa hanno in più rispetto a quelle con zero invalidi.

Questa metodologia fornisce prime buone risposte al nostro problema dal momento che mette in risalto le caratteristiche delle famiglie con maggior rischio di

[6] Per salvaguardarsi da problemi di basse frequenze sia a numeratore che a denominatore si è soliti sommare 0,5.

disagio. Come esemplificative si sono considerate le variabili *numero di invalidi* e *numero di malati cronico-degenerativi*, ma anche per altri aspetti si ricavano risultati analoghi[7].

Tabella 3. *Calcolo dei logit per la variabile che conta il numero di invalidi.*

Logit per le famiglie con nessun invalido	1,3	3,0	4,8
Logit per le famiglie con almeno un invalido	-0,5	0,7	2,5
Differenza	1,8	2,3	2,4

Da ultimo si considera l'approccio non parametrico mediante la statistica test di Anderson-Darling[8]. La significatività che ne deriva sembra indicare l'adeguatezza del metodo rispetto al problema in questione. Per la prima variabile si evidenzia che le gradazioni di gravità sono maggiori nelle famiglie con uno o più invalidi; per la seconda nelle famiglie con due o più malati e nella terza nelle famiglie con almeno un invalido e almeno due malati. I risultati sono riportati nella Tab.4.

I metodi sono stati applicati anche considerando tre livelli di gravità (nullo o lieve, acuto, estremo). I risultati, riportati nella seconda parte della Tab. 4, indicano che i metodi basati sulla massimizzazione della distanza distributiva e della differenza tra le mediane condizionate forniscono risultati che mantengono una significatività della differenza fra le due distribuzioni, ma i valori sono meno significativi di quelli ottenuti sfruttando quattro livelli di gravità. Questo risultato conferma l'inadeguatezza dei metodi al problema in questione dal momento che, pur avendo dato artificialmente importanza alle modalità che denotano la gravità del fenomeno, non si ottengono miglioramenti apprezzabili.

Viceversa, il metodo di stima della significatività basato sul test non parametrico e quello basato sugli *odds* proporzionali mantengono intatta la capacità di evidenziare il rischio associato alle situazioni estreme

[7] I metodi sopra riportati sono stati applicati anche invertendo l'ordinamento della gravità, ossia considerando una scala di misura che va da una gravità estrema alla nullità del fenomeno. Le conclusioni alle quali si perviene sono essenzialmente le stesse.

[8] Per l'analisi è stato applicato il software NPC Test (Pesarin, 2001).

Tabella 4. *Risultati ottenuti applicando i diversi metodi statistici considerati al fenomeno del disagio familiare*

	Variabili	χ^2	χ^2_{assoc}	*Ridit*	*θ Free-man*	*Media di rischi*	*Modello a odds proporzionali*	*Anderson-Darling*
Gravità misurata su quattro livelli	Numero di invalidi (nessuno/uno o più)	95,6	90,7	$\overline{r} = 0,02$ $t = -13,5$	0,46	13,5	6,1 9,7 11,5	0,0001
	Numero di malati cronico-degenerativi (al più uno/due o più)	90,7	27,8	$\overline{r} = 0,05$ $t = -14,5$	0,21	4,2	5,7 9,1 10,9	0,0001
	Effetto di interazione (nessun invalido, al più un malato/nessun invalido, due o più malati)	28,3	31,9	$\overline{r} = 0,05$ $t = -14,4$		7	3,0 3,2 10,3	
	Effetto di interazione (nessun invalido, al più un malato/uno o più malati)	88,9	42,0	$\overline{r} = 0,01$ $t = -9,8$	0,27	16,4	5,2 8,5 20,4	0,0001
	Effetto di interazione (nessun invalido, due o più malati/ uno o più invalidi)	16,9	3,8	$\overline{r} = 0,15$ $t = -6,2$		2,3	1,7 2,6 2,0	
Gravità misurata su tre livelli	Numero di invalidi (nessuno/uno o più)	25,5	65,0	$\overline{r} = 0,03$ $t = -13,3$	0,27	12,1	9,7 11,5	0,0001
	Numero di malati cronico-degenerativi (al più uno/due o più)	2,5	7,8	$\overline{r} = 0,06$ $t = -14,2$	0,06	3,8	2,5 5,9	0,0097
	Effetto di interazione (nessun invalido, al più un malato/nessun invalido, due o più malati)	3,5	11,1	$\overline{r} = 0,06$ $t = -14,0$		7,1	3,2 10,3	
	Effetto di interazione (nessun invalido, al più un malato/uno o più malati)	17,8	29,5	$\overline{r} = 0,02$ $t = -9,7$	0,11	3,6	8,5 20,4	0,0001
	Effetto di interazione (nessun invalido, due o più malati/uno o più invalidi)	6,7	4,4	$\overline{r} = 0,16$ $t = -6,1$		2,5	2,6 2,0	

4. Considerazioni conclusive

Nella nota abbiamo evidenziato alcune metodologie statistiche per lo studio di fenomeni che si presentano con livelli di gravità progressivi e le cui frequenze decadono rapidamente nei livelli estremi di gravità.

Sono stati esaminati quattro metodi statistici basati rispettivamente sulla massimizzazione della distanza distributiva, della differenza tra le mediane condizionate, dei rischi relativi e della significatività mediante un approccio non parametrico.

I primi due metodi si sono rivelati inadeguati alla risoluzione del problema. D'altro canto, quelli basati sulla massimizzazione dei rischi relativi e della significatività mediante approccio non parametrico sono adatti allo studio di fenomeni che presentano un decadimento molto rapido della frequenze.

Il metodo degli odds proporzionali e quello non parametrico si sono rivelati adeguati a cogliere variazioni anche piccole nelle classi estreme caratterizzate da elevata gravità del fenomeno.

Riferimenti bibliografici

AGRESTI A. (2002) *Categorical Data Analysis,* Wiley-interscience, Hobocken

BREDA C., FABBRIS L. (2002) Il rischio di disagio nelle famiglie di Padova. In: PUGGIONI G. (a cura di) *Modelli e metodi per l'analisi di rischi sociali e sanitari*, Cleup, Padova: 161-184

FLEISS J.L. (1981) *Statistical Methods for Rates and Proportions,* John Wiley & Sons, New York

FREEMAN LINTON C. (1965) *Elementary Applied Statistics*, Wiley, New York

GART J.J. (1962) On the combination of relative risks, *Biometrics*, **18**: 601-610

GART J.J. (1970) Point and interval estimation of the common odds ratio in the combination of 2×2 tables with fixed marginals, *Biometrika,* **57**: 471-475

MCCULLAGH P., NELDER J.A. (1989) *Generalized Linear Models,* Chapman & Hall, London

METHODOLOGICA SRL (2001) *NPC Test Version 2.0,* Treviso, Italy

PESARIN F. (2001) *Multivariate Permutation Tests with Applications in Biostatistics,* Wiley, Chichester

SELVIN S. (1991) *Statistical Analysis of Epidemiologic Data,* Oxford University, New York

Measures of Separateness among Populations relative to Gravity of the Phenomenon

Summary. *In social and health studies researchers are often faced with phenomena that are characterized by progressive grades of severity and whose highest levels of severity have very low frequencies. Typical phenomena are the health status of a person or of an area, the economic uneasiness of families and companies, the relational tensions between individuals, families, communities. For the analysis of the relationship between such phenomena and "causal" factors specific methods are needed, which weigh in an adequate manner the classes representing the most severe situations. In this paper we intend to suggest some statistical methods for the evaluation of the separateness between two populations in terms of severity of the examined phenomenon. To this aim, we discuss the theoretical and empirical properties of some statistical methods for the analysis of the asymmetric relationship between two variables.*
Keywords*: Separateness, Asymmetric analysis, Gravity of a phenomenon, Severity of a phenomenon, Distance between distributions, Relative Risk.*